35. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklassen 11–13
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

351311

In einem Dreieck ABC liege der Fußpunkt D der auf $\overline{AB}$ senkrechten Höhe $\overline{CD}$ so zwischen A und B, daß $|AD| = 9$ und $|DB| = 7$ gilt (gemessen in beliebiger Längeneinheit). Eine zu $\overline{CD}$ parallele Gerade zerlege das Dreieck in zwei Teilflächen, die einander gleichen Flächeninhalt haben. Es sei P der Schnittpunkt dieser Geraden mit $\overline{AB}$.

Wie lang ist die Strecke $\overline{AP}$?

351312

In einem alten Rechenbuch wird das folgende Verfahren für die Multiplikation der Zahl 142 857 mit einer natürlichen Zahl n angegeben:

„Man dividiere zunächst n durch 7 und schreibe den ganzzahligen Teil des Ergebnisses hin. Dann multipliziere man den Rest mit 142 857 und setze die Ziffern des Produktes hinter die aufgeschriebene Zahl. Von der so gebildeten Zahl subtrahiere man noch die zuerst hingeschriebene Zahl. Auf diese Weise erhält man das Produkt $142\,857 \cdot n$."

a) Man begründe, daß dieses Verfahren immer zum richtigen Ergebnis führt, wenn n nicht durch 7 teilbar ist.
b) Man untersuche, wie das Verfahren modifiziert werden kann, wenn n ein Vielfaches von 7 ist.

351313

Bildet man von einer natürlichen Zahl n die Quersumme, vom Ergebnis wieder die Quersumme usw., so gelangt man nach endlich vielen Schritten zu einer einstelligen Zahl, die als $Q(n)$ bezeichnet sei. Man beweise, daß für jede natürliche Zahl n die Gleichung $Q(n^2) = Q\left((Q(n))^2\right)$ gilt.

Beispiel: Für $n = 17$ gilt einerseits $n^2 = 289$, $Q(n^2) = 1$, andererseits $Q(n) = 8$, $(Q(n))^2 = 64$, $Q\left((Q(n))^2\right) = 1$.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

351314

Die Buchstaben ***M*** und ***O*** (für „Mathematik-Olympiade") sollen jeweils einem Quadrat gleicher Größe einbeschrieben werden. Beide Buchstaben sollen dabei dieselbe „Strichdicke" x aufweisen (siehe Abb. A 351314).

Bei einer gewissen Strichdicke überdeckt der Buchstabe O einen Flächenanteil von $\frac{5\pi}{36}$ seines Quadrates; welchen Flächenanteil seines Quadrates füllt bei dieser Strichdicke der Buchstabe M aus?

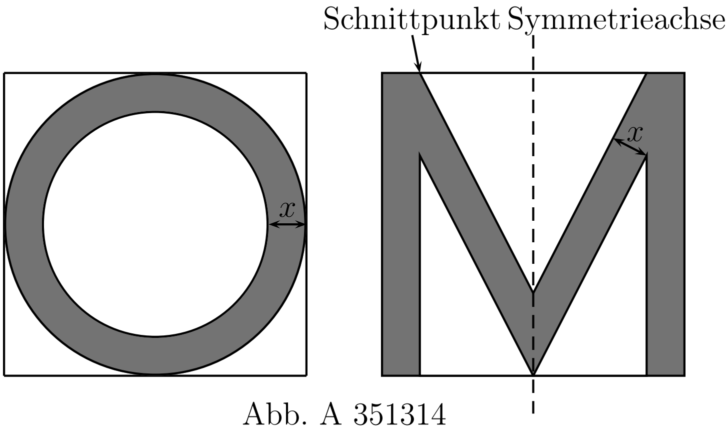

Abb. A 351314