35. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklassen 8
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

350831

Die vier Mädchen Anja, Bärbel, Claudia und Daniela treffen im Tennis – Club auf die drei Jungen Steffen, Thomas und Ulrich.

a) Sie überlegen, wie viele Teams als gemischtes Doppel (ein Mädchen und ein Junge) sie überhaupt bilden könnten. Nenne alle diese Teams!

b) Nun überlegen sie, welche Spiele sich ansetzen lassen, so daß jede mögliche Zusammenstellung zweier Teams genau einmal angesetzt wird. Welche Spiele sind das?

c) An jedem Sonnabend können genau 6 Tennisplätze genutzt werden. Stelle einen Turnierplan auf, der folgende Bedingungen erfüllt:
   (1) Solange das Turnier läuft, werden an jedem Sonnabend alle 6 Tennisplätze genutzt.
   (2) An jedem dieser Sonnabende gilt: Kein Team wird an diesem Sonnabend zweimal angesetzt. (Einzelne Spieler dürfen an einem Sonnabend mehrmals eingesetzt werden, aber dann nur in verschiedenen Teams.)
   (3) Im gesamten Turnier wird jedes nach b) mögliche Spiel genau einmal angesetzt.

350832

a) Zu einem gegebenen konvexen Viereck $ABCD$ soll eine Strecke konstruiert werden, die A als einen Eckpunkt hat und das Viereck in zwei flächeninhaltsgleiche Teile zerlegt. Beschreibe eine Konstruktion und beweise, daß sich zu jedem beliebig gegebenen konvexen Viereck $ABCD$ eine derartige Strecke ergibt, wenn sie nach deiner Beschreibung konstruiert wird!

b) Konstruiere ein Viereck $ABCD$, in dem $a = |AB| = 4{,}0$ cm,$b = |BC| = 3{,}7$ cm sowie $d = |AD| = 4{,}7$ cm gilt, der Innenwinkel BAC die Größe $\alpha = 61°$ hat und der Innenwinkel ABC die Größe $\beta = 61°$ hat. Führe zu diesem Viereck die nach a) beschriebene Konstruktion durch!

Hinweis: Ein Viereck $ABCD$ heißt genau dann konvex, wenn alle seine Innenwinkel kleiner als 180° sind.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

350833

Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm mit spitzen Winkel bei A und mit $|AB| > |BC|$. Der Kreis um D mit dem Radius $|DC|$ schneide die Verlängerung von $\overline{CB}$ über B hinaus in E, der Kreis um B mit dem Radius $|BC|$ schneide die Strecke $\overline{CD}$ zwischen C und D in F.

Beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets folgt:

a) Die Winkel DEC und BFC sind einander gleich groß,

b) das Dreieck AEF ist gleichschenklig.