35. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklassen 8
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

350834

In einem Lager werden große, mittelgroße und kleine Kisten aufbewahrt. Jede mittelgroße Kiste liegt in einer großen Kiste, jede kleine Kiste liegt in einer mittelgroßen Kiste; jede kleine Kiste ist leer. Für die Anzahlen dieser Kisten sind folgende Bedingungen erfüllt:

(1) Für jede große Kiste gilt: Entweder ist diese Kiste leer, oder die Anzahl der in ihr befindlichen mittelgroßen Kisten beträgt 10.
(2) Für jede mittelgroße Kiste gilt: Entweder ist diese Kiste leer, oder die Anzahl der in ihr befindlichen kleinen Kisten beträgt 10.
(3) Die Anzahl aller großen Kisten beträgt 10.
(4) Die Anzahl aller nicht leeren Kisten beträgt 54.

a) Wie viele Kisten sind insgesamt in dem Lager?
b) Gib ein Beispiel für die Anzahl aller mittelgroßen Kisten und die Anzahl aller Kleinen Kisten so an, daß in diesem Beispiel die Bedingungen (1) bis (4) erfüllt sind!

350835

Beweise folgende Aussagen!

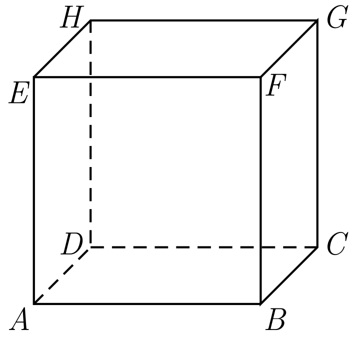
Wenn p und q Primzahlen sind, für die $q - p = 2$ und $p > 3$ gilt, dann folgt:

a) Das arithmetische Mittel von p und q ist durch 3 teilbar.
b) Vergrößert man das Produkt von p und q um 1, so entsteht eine durch 18 teilbare Zahl.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

<u>350836</u>

Auf der Ecke A eines Würfels $ABCDEFGH$ (siehe Abbildung A 350836) sitzt eine mathematisch geschulte Raupe. Sie will alle diejenigen Wege von A nach G ausprobieren, von denen jeder nur längs Würfelkanten verläuft und keinen Eckpunkt zweimal erreicht. Um eine Kante zu durchkriechen, braucht sie je einen Tag; nachts ruht sie.



A 350836

Wenn sie am Punkt G angekommen ist, rutscht sie in der Nacht auf der Diagonale $\overline{GA}$ zurück nach A und beginnt am Morgen einen neuen Weg, den sie noch nicht ausprobiert hatte. Sie startet am 2. Januar 1996. Am Morgen welchen Tages ist sie wieder in A, nachdem sie alle vorgesehenen Wege ausprobiert hat?