35. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 7
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

350741

In einer Klausur erreichten die Schüler folgende Ergebnisse: Genau 22 Schüler erreichten je eine der Noten „Sehr gut", „Gut", „Befriedigend". Genau 40 % aller teilnehmenden Schüler erreichten die Note „Ausreichend", genau 5 % aller teilnehmenden Schüler erreichten die Note „Mangelhaft" die Note „Ungenügend" kam nicht vor.

Die Anzahl der Schüler mit der Note „Gut" war genau um 3 größer als die Anzahl der Schüler mit der Note „Sehr gut", die Note „Befriedigend" kam genau dreimal so oft vor wie die Note „Gut".

Wie viele Schüler nahmen insgesamt an der Klausur teil? Wie groß war für jede einzelne der Noten „Sehr gut", „Gut", „Befriedigend", „Ausreichend", „Mangelhaft" die Anzahl der Schüler, die diese betreffende Note erreichten?

350742

Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Ferner sei $ACDE$ ein beliebiges Parallelogramm, das (bis auf die gemeinsame Strecke $\overline{AC}$) ganz außerhalb des Dreiecks ABC liegt, und $BCFG$ sei ein Parallelogramm, das (bis auf die gemeinsame Strecke $\overline{BC}$) ganz außerhalb des Dreiecks ABC liegt. Weiter sei H der Schnittpunkt der durch D und E gelegenen Geraden mit der durch F und G gelegenen Geraden. Schließlich sei $ABKL$ ein Parallelogramm, in dem die Seite $\overline{BK}$ parallel zu der Strecke $\overline{CH}$ und ebenso lang wie diese Strecke ist.

Beweise, daß aus diesen Voraussetzungen folgt:

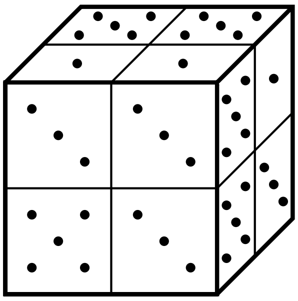
Die Summe der Flächeninhalte der Parallelogramme $ACDE$ und $BCFG$ ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms $ABLK$.

Hinweis zu dieser Aufgabe: Die hier zu beweisende Aufgabe ist möglicherweise aus einer Arbeitsgemeinschaft bekannt, z. B. unter der Bezeichnung „Satz von Pappos". In diesem Fall genügt es natürlich nicht, die Aussage ohne Beweis als bekannten Sachverhalt anzuführen (wie oben im Vorspann erklärt), sondern hier ist ein Beweis anzuführen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

350743

Axel, Beate und Chris sehen die Abbildung A 350743. Sie überlegen, was man aussagen kann, wenn der dargestellte Würfel aus 8 Spielwürfeln zusammengesetzt ist, bei denen wie üblich jedes Mal die Seitenflächen mit den Augenzahlen 1, 3, 5 an einer Ecke zusammenstoßen.



A 350743

Zunächst bemerken die drei:

Alle zwölf sichtbaren Augenzahlen sind ungerade, ihre Summe S beträgt 40.

a) Axel meint nun: „Man kann die Würfel auch so zusammensetzen, daß alle sichtbaren Augenzahlen ungerade sind, ihre Summe S aber nur 30 beträgt."
Zeichne ein Schrägbild eines zusammengesetzten Würfels und trage darin Augenzahlen so ein, daß Axels Aussage bestätigt wird!

b) Beate sagt: „Wenn man wieder die Bedingung stellt, daß alle sichtbaren Augenzahlen ungerade sind, so kenne ich für die Summe S dieser zwölf Augenzahlen den kleinstmöglichen Wert, den S unter dieser Bedingung erreichen kann."
Ermittle diese kleinstmögliche Summe!

c) Chris kommt auf Axels Aussage zurück und fügt hinzu: „Wenn man erreichen will, daß alle sichtbaren Augenzahlen ungerade sind und ihre Summe 30 beträgt, dann müssen mindestens vier der sichtbaren Augenzahlen eine Eins sein."
Beweise das!