35. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklassen 8
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

350844

Jemand sucht eine natürliche Zahl, die die beiden folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllt:

(1) In der Zahl, wie üblich in Ziffernschreibweise angegeben, kommt jede der Ziffern 3, 5 und 9 mindestens einmal vor.

(2) Die Zahl ist durch jede der Zahlen 3, 5 und 8 teilbar.

Er merkt schnell, daß es nicht nur eine solche Zahl gibt, sondern daß man beliebig viele solcher Zahlen finden kann. Darauf hin stellt er die Aufgabe, unter allen natürlichen Zahlen, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllen, die sechs *kleinsten* Zahlen zu finden.

Ermittle diese Zahlen!

350845

Es sei ABC ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei C.

In diesem Dreieck sei H der Fußpunkt der auf $\overline{AB}$ senkrechten Höhe. Ferner sei P ein beliebiger Punkt auf der Strecke $\overline{HC}$, und Q sei der Schnittpunkt der Strecke $\overline{AB}$ mit der Geraden, die durch P geht und parallel zu $\overline{BC}$ ist.

Beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets folgt: Die Gerade durch A und P steht senkrecht auf der Geraden durch C und Q.

350846

In einem Ratespiel soll eine natürliche Zahl z gefunden werden. Andrea, Benjamin, Carolin und Daniel vereinbaren: Jeder von ihnen wird drei Aussagen machen; mindestens eine dieser drei Aussagen ist wahr, mindestens eine dieser drei Aussagen ist falsch.

Eva, die diese Spielregeln kennt und die Aussagen hört, soll dann die Zahl z finden.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

Andrea sagt:	(1)	Die Zahl z ist durch 4 teilbar.
	(2)	Die Zahl z ist durch 9 teilbar.
	(3)	Das Elffache der Zahl z ist kleiner als 1000.
Benjamin sagt:	(1)	Die Zahl z ist durch 10 teilbar.
	(2)	Die Zahl z ist größer als 100.
	(3)	Das Zwölffache der Zahl z ist größer als 1000.
Carolin sagt:	(1)	Die Zahl z ist eine Primzahl
	(2)	Die Zahl z ist durch 7 teilbar.
	(3)	Die Zahl z ist kleiner als 20.
Daniel sagt:	(1)	Die Zahl z ist nicht durch 7 teilbar.
	(2)	Die Zahl z ist kleiner als 12.
	(3)	Das Fünffache der Zahl z ist kleiner als 70.

Untersuche, ob es genau eine natürliche Zahl z gibt, bei der mit diesen Aussagen die Spielregeln eingehalten wurden! Wenn das der Fall ist, nenne diese Zahl!