35. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 9
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

350944

Wir betrachten diejenigen zehnstelligen Zahlen, in denen jede der zehn Ziffern $0, 1, \ldots, 9$ genau einmal auftritt.

Beweisen Sie, daß es unter diesen Zahlen mindestens 50 000 gibt, die durch 11 teilbar sind!

350945

Jemand sucht eine Serie $S = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ von n natürlichen Zahlen der Form

$$a_1,\ a_2 = a_1 + 1,\ a_3 = a_2 + 1, \ldots, a_n = a_{n-1} + 1$$

mit der Eigenschaft, daß keine der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ eine durch 5 teilbare Quersumme hat.

a) Welches ist die größtmögliche Länge n, die eine solche Serie S haben kann?
b) Wie viele solche Serien S dieser größtmöglichen Länge n gibt es insgesamt im Bereich der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000?

350946

Beweisen Sie, daß für jedes spitzwinklige Dreieck ABC die folgende Aussage (*) gilt!

(*) Sind A', B' und C' die Fußpunkte der auf $\overline{BC}, \overline{CA}$ bzw. $\overline{AB}$ senkrechten Höhen, so ist

$$|AC'|^2 + |BA'|^2 + |CB'|^2 = |C'B|^2 + |A'C|^2 + |B'A|^2$$

Untersuchen Sie ferner, ob die Aussage (*) auch für jedes rechtwinklige Dreieck ABC gilt!