35. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklassen 11–13
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

351344

Es sind alle Paare (x, y) positiver reeller Zahlen zu ermitteln, die das Gleichungssystem

$$x - y = 7 \tag{1}$$

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} = 7 \tag{2}$$

erfüllen.

351345

In einem Kreis k seien zwei Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ gegeben, die sich nicht schneiden. Gegeben sei außerdem eine Länge $a < |CD|$. Gesucht sind alle diejenigen Punkte X auf k, die die Bedingung erfüllen, daß die Strecken $\overline{XA}$ und $\overline{XB}$ die Sehne $\overline{CD}$ in den Punkten P bzw. Q schneiden, für die $|PQ| = a$ gilt.

Beschreiben Sie eine Konstruktion mit dem Ziel, zu gegebenen $k, \overline{AB}, \overline{CD}$ und a Punkte X zu erhalten! Beweisen Sie, daß ein Punkt X dann und nur dann durch die von Ihnen beschriebene Konstruktion erhalten wird, wenn er die geforderte Bedingung erfüllt!

(Insbesondere soll aus der Beschreibung auch hervorgehen, wie bei Durchführung der Konstruktion ersichtlich werden kann, ob es Punkte X gibt, die die Bedingung erfüllen. Das zeichengenaue Ausführen einer solchen Konstruktion wird nicht verlangt.)

351346

Teil A

Man beweise folgende Aussage:

Wenn ein Polynom $p(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ drei reelle positive Nullstellen hat, von denen mindestens zwei voneinander verschieden sind, so gilt : $A^2 + B^2 + 18C > 0$.

Teil B

Jeder Punkt einer Ebene sei mit genau einer der drei Farben rot, schwarz oder blau gefärbt. Man beweise, daß es unter dieser Voraussetzung stets in dieser Ebene ein Rechteck gibt, dessen vier Eckpunkte mit einander gleicher Farbe gefärbt sind.