36. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklassen 9 und 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

361011

Ralf gelingt es, jede gerade Zahl von 4 bis 100 als eine Summe zweier Primzahlen darzustellen.

Ute schafft solche Darstellungen auch für einige weitere Zahlen. Sie sagt: „Ich vermute, daß jede gerade Zahl eine Summe zweier Primzahlen ist.“ Ralf meint: „Man kann nicht Vermutungen aufstellen, die man für unendlich viele Fälle ausspricht, aber nur in Einzelfällen bestätigt; auch dann nicht, wenn es viele Einzelfälle sind.“ Ute erwidert: „Doch, das kann man; nur . . . .“

(a) Wie würden Sie Utes Erwiderung fortsetzen?

(b) Schreiben Sie ein Computerprogramm, mit dem man Ralfs Ergebnis bestätigen kann!

361012

Axel wählt eine natürliche Zahl z_0 und bildet aus ihr durch fortgesetzte Verdopplung die Folge der Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_{14}$. Er bemerkt: Bei seiner Wahl von z_0 gelten für die erhaltene Folge die Aussagen:

– Die ersten vier Zahlen z_1 bis z_4 sind 5-stellig.
– Die folgenden drei Zahlen sind 6-stellig.
– Dann folgen drei 7-stellige Zahlen,
– und am Ende stehen vier 8-stellige Zahlen.

Susanne wählt eine andere Zahl z_0, bildet nach der gleichen Regel z_1 bis z_{14} und stellt zu ihrer Überraschung fest, daß ebenfalls die obigen Aussagen gelten.

Die Mathematiklehrerin meint, daß dies nun nicht so überraschend sei; es gebe mehr als 50 Startzahlen z_0, bei deren Wahl ebenfalls diese Aussagen gelten.

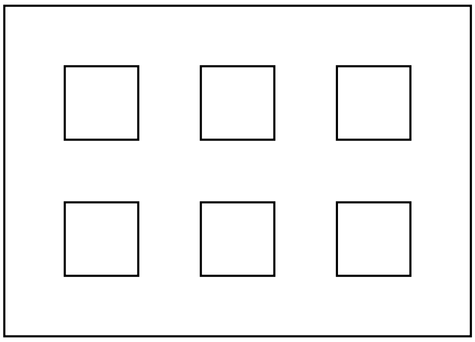
(a) Hat die Lehrerin recht?

(b) Wie viele Startzahlen z_0, bei deren Wahl die obigen Aussagen gelten, gibt es insgesamt?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

361013

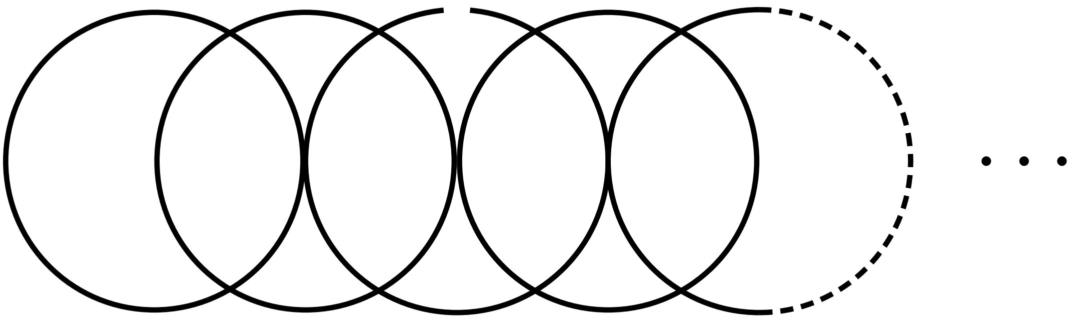
Zur Gestaltung des Raumes für eine Feier will eine Schulklasse auf einer gegebenen Rechteckfläche sechs Bilder so aufkleben, wie in Abbildung A 361013 ersichtlich. Zur Verfügung stehen zehn Bilder in dem gewünschten Format; keine zwei dieser zehn Bilder sind einander gleich. Wie viele Möglichkeiten gibt es insgesamt, sechs dieser zehn Bilder in der vorgesehenen Weise anzuordnen?



A 361013

361014

Bei einer Kette aus 63 Gliedern habe jedes Glied eine Masse von 1 g. Durch Aufbiegen von einigen Gliedern wird die Kette zerlegt. Abbildung A 361014 zeigt als Beispiel das Aufbiegen des dritten Gliedes.



A 361014

Die aufgebogenen Glieder und die verbliebenen Teilketten sollen als Wägestücke dienen, und zwar so, daß stets ein zu wägender Gegenstand auf eine Waagschale kommt, die passenden Wägestücke auf die andere Waagschale. (Ein glqq Subtraktionsverfahren", bei dem auch Wägestücke auf dieselbe Waagschale wie der Gegenstand kommen dürfen, soll also nicht stattfinden.)

Durch das Aufbiegen welcher Glieder läßt sich erreichen, daß mit den so erhaltenen Wägestücken jeder ganzzahlige Grammbetrag von 1 g bis 63 g zusammengesetzt werden kann? Dabei sollen so wenig Glieder wie möglich aufgebogen werden.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

361015

Einem Kreis mit gegebenem Radius r sei ein regelmäßiges n-Eck einbeschrieben. Auch seine Seitenlänge s_n sei gegeben. Gesucht ist die Seitenlänge s_{2n} eines regelmäßigen $2n$-Ecks, das demselben Kreis einbeschrieben ist. Diese Seitenlänge soll in Abhängigkeit von r und s_n angegeben werden.

361016

Auf dem Arbeitsblatt ist das Bild $A'B'C'D'S'$ einer vierseitigen Pyramide $ABCDS$ bei einer schrägen Parallelprojektion vorgegeben. Von einer Ebene ε wird gefordert, daß die Schnittfigur dieser Ebene mit der Pyramide $ABCDS$ ein Parallelogramm ist. Zu zeichnen ist das (bei derselben Projektion entstehende) Bild einer solchen Schnittfigur.

Rainer schlägt eine Konstruktion vor, bei der die Strecke $\overline{AB}$ eine Seite eines gesuchten Parallelogramms werden soll: Er konstruiert Z' so, daß $A'B'C'Z'$ ein Parallelogramm wird, und verschiebt dann die Strecke $\overline{C'Z'}$ in Richtung von C' nach S', bis er X' auf $\overline{C'S'}$ sowie Y' auf $\overline{D'S'}$ so erhält, daß $Z'C'X'Y'$ ein Parallelogramm wird.

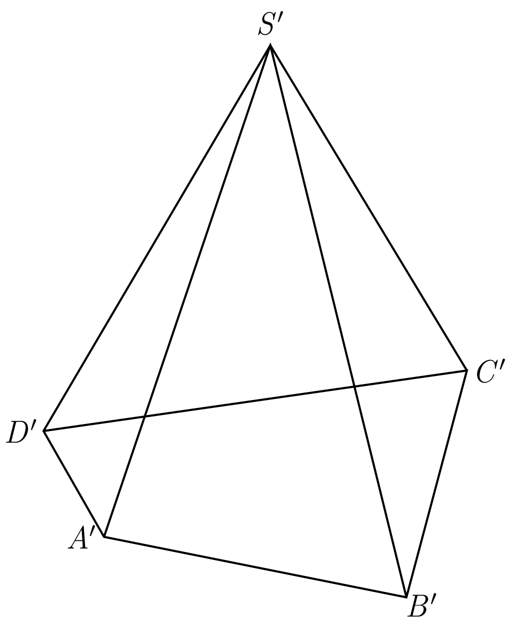
Er sagt: „Ich begründe diese Konstruktion mit dem Satz, daß Geraden, die zueinander (aber nicht zur Projektionsrichtung) parallel sind, bei Parallelprojektion stets wieder in zueinander parallele Geraden abgebildet werden.“

Susann erwidert: „Jetzt ist zwar ein Parallelogramm, aber dennoch nicht Bild einer gesuchten Schnittfigur.“

(a) Beweisen Sie, daß Susann recht hat!

(b) Geben Sie eine Konstruktion an, mit der stattdessen tatsächlich das Bild einer gesuchten Schnittfigur gewonnen werden kann!

(c) Beweisen Sie, daß es sogar unendlich viele Ebenen gibt, die die Pyramide $ABCDS$ in je einem Parallelogramm schneiden!



A 361016