36. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklassen 11–13
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

361311

a) Man ermittle alle positiven ganzen Zahlen n mit der folgenden Eigenschaft:
Schreibt man vor den Anfang der im Dezimalsystem geschriebenen Zahl n zusätzlich eine geeignet gewählte weitere Ziffer, so ergibt sich die Zahl $57 \cdot n$.

b) Man beweise, daß keine positive ganze Zahl n existiert, aus der sich durch das in (a) beschriebene Voranstellen einer Ziffer die Zahl $56 \cdot n$ ergeben würde.

361312

Man beweise, daß für jedes rechtwinklige Dreieck die folgende Aussage gilt:

Ist ρ der Inkreisradius, r der Umkreisradius, u der Umfang und c die Länge der Hypotenuse des Dreiecks, so ergibt sich zwischen den beiden Verhältnissen $u : c$ und $\rho : r$ die Differenz 2.

361313

Man beweise, daß für jede natürliche Zahl $n \geqslant 4$ die Ungleichung

$$(4^2 - 4) \cdot (5^2 - 4) \cdot \dots \cdot (n^2 - 4) < 6 \cdot (4^2 - 9) \cdot (5^2 - 9) \cdot \dots \cdot (n^2 - 9)$$

gilt.

361314

In einem Vortrag wurde erwähnt, daß man mit algebraischen Methoden die folgende historische Aufgabe der sogenannten „Würfelverdopplung“ als unlösbar durch eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal nachweisen kann:

Gegeben ist eine Streckenlänge a. Gesucht ist die Kantenlänge x eines Würfels, der doppelt so großes Volumen hat wie ein Würfel der Kantenlänge a.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

In der anschließenden Diskussion schlägt ein Schüler vor:

„Man kann zu einem Quader mit den Kantenlängen $a_0 = 2a$, $b_0 = c_0 = a$ mit Zirkel und Lineal eine Länge x_1 konstruieren, für die $x_1^2 = a_0 \cdot b_0$ gilt. Der Quader mit den Kantenlängen $a_1 = b_1 = x_1$, $c_1 = c_0$ hat dasselbe Volumen wie der vorige Quader, ebenso auch alle folgenden Quader.

Man konstruiert weiter: x_2 mit $x_2^2 = b_1 \cdot c_1$ und erhält den Quader mit $a_2 = a_1$, $b_2 = c_2 = x_2$; dann konstruiert man x_3 mit $x_3^2 = a_2 \cdot b_2$ und erhält den Quader mit $a_3 = b_3 = x_3$, $c_3 = c_2$; weiter erreicht man $x_4^2 = b_3 \cdot c_3$ und erhält den Quader mit $a_4 = a_3$, $b_4 = c_4 = x_4$; ... usw. Diese Längen x_1, x_2, x_3, $x_4, \ldots$ kommen der gesuchten Länge x beliebig nahe.“

(a) Berechnen Sie x sowie x_1, x_2, x_3, x_4 und dann $\frac{x_1}{x}, \frac{x_2}{x}, \frac{x_3}{x}, \frac{x_4}{x}$, diese vier Werte als Potenzen mit der Basis 2 geschrieben!

(b) Beweisen Sie, daß in der Tat die Längen x_n sich beliebig wenig von x unterscheiden, wenn nur für n genügend große Werte gewählt werden!