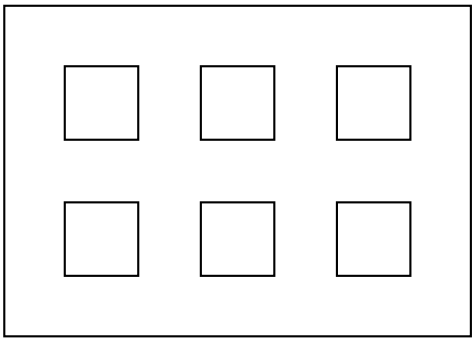
36. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

360921

Ein Fotoklub möchte eine Serie von Blättern über seine Arbeit herstellen. Jedes Blatt soll genau 6 Bilder enthalten, wie in Abbildung A 360921 ersichtlich; die Motive der 6 Bilder auf je einem Blatt sollen voneinander verschieden sein. Insgesamt stehen 10 verschiedene Motive zur Verfügung.



A 360921

Welches ist die größtmögliche Anzahl voneinander verschiedener Blätter, die sich in dieser Art herstellen lassen?

Dabei gelten zwei Blätter bereits dann als voneinander verschieden, wenn eines dieser beiden Blätter mindestens ein Motiv enthält, das auf dem anderen Blatt nicht vorkommt. Enthalten zwei Blätter dagegen beide genau dieselben 6 Motive, nur möglicherweise in unterschiedlicher Reihenfolge, so gelten sie nicht als verschieden.

Hinweis: Anders als im Vorspann vermerkt, würde es bei dieser Aufgabe nicht ausreichen, etwa eine (für Aufgaben dieses Typs) anwendbare fertige Formel als bekannten Sachverhalt anzuführen und dann nur formal anzuwenden. Vielmehr ist, wenn eine solche Formel benutzt werden soll, zusätzlich zu ihr eine Begründung zu nennen (die wenigstens für die hier gestellte spezielle Aufgabe ausreicht).

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

360922

Ermitteln Sie alle Primzahlen p mit der Eigenschaft, daß die Zahl $p^2 - 1$ durch 24 teilbar ist!

360923

Es seien a, b, c und d positive Zahlen.

Beweisen Sie, daß unter dieser Voraussetzung stets die Ungleichung

$$\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{b+c+d} > \frac{4}{a+b+c+d}$$

gilt!

360924

Konstruieren Sie ein beliebiges Viereck $ABCD$, das folgende Eigenschaften hat: Alle Innenwinkel sind kleiner als 180°, keine zwei Seiten sind einander gleichlang, keine zwei Seiten sind zueinander parallel!

Nun soll im Innern des von Ihnen konstruierten Vierecks $ABCD$ ein Punkt P so konstruiert werden, daß die beiden Vierecke $ABCP$ und $CDAP$ einander gleichen Flächeninhalt haben. (*Bemerkung:* : Es gibt unendlich viele solche Punkte; nur ein beliebiger von ihnen soll konstruiert werden.)

(a) Beschreiben Sie, wie aus gegebenen A, B, C, D ein Punkt P konstruiert werden soll!

(b) Beweisen Sie, daß ein Punkt P, wenn er nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird, die Bedingung (gleicher Flächeninhalt von $ABCP$ und $CDAP$) erfüllt!

(c) Führen Sie die von Ihnen beschriebene Konstruktion durch!