

36. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklasse 10
Aufgaben



© 1996 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

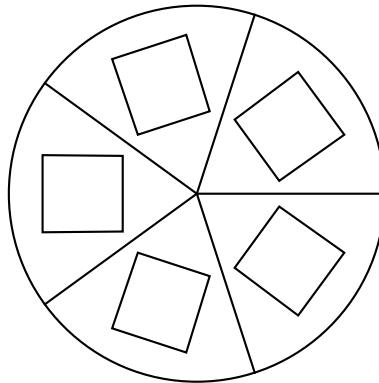
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

361021

Zur Gestaltung eines bunten Nachmittags will eine Schulklasse ein Glücksrad bauen. Sie hat dafür eine runde Scheibe mit 5 Plätzen für je ein Bild; siehe Abbildung A 361021. Es stehen zum Aufkleben 5 verschiedene Bilder zur Verfügung.

Wie viele verschiedene Reihenfolgen, diese Bilder auf dem Glücksrad anzubringen, gibt es insgesamt?

Dabei gelten zwei Reihenfolgen genau dann als nicht verschieden voneinander, wenn in ihnen für je zwei Bilder die gleiche Drehung das erste Bild in das zweite überführt.



A 361021

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

361022

Wenn z_0 und a zwei gegebene natürliche Zahlen sind, so werde diejenige Zahlenfolge $(z_1, z_2, \dots, z_{14})$ eine „ $(z_0; a)$ -Folge“ genannt, bei der aus z_0 der Reihe nach durch Multiplikation mit a die Zahlen z_1, z_2, \dots, z_{14} gebildet wurden und bei der je zwei dieser 14 Zahlen 5-stellig, 6-stellig, 7-stellig, 8-stellig, 9-stellig, 10-stellig, 11-stellig sind.

- (a) Finden Sie zu $a = 3$ eine natürliche Zahl z_0 , mit der eine $(z_0; a)$ -Folge entsteht!
- (b) Untersuchen Sie, ob es auch eine $(z_0; a)$ -Folge zu einer natürlichen Zahl $a \neq 3$ gibt!

361023

Beweisen Sie die folgende Aussage!

Für jede gerade natürliche Zahl n , von der vorausgesetzt wird, daß sie die Summe zweier Quadratzahlen ist, folgt: Auch $\frac{1}{2}n$ ist die Summe zweier Quadratzahlen.

(Zwei Beispiele dafür, daß sowohl die Voraussetzung als auch die Behauptung erfüllt sein kann, sind etwa: 1. *Beispiel*: $8 = 2^2 + 2^2$ wegen $4 = 2^2 + 0^2$; 2. *Beispiel*: $34 = 5^2 + 3^2$ wegen $17^2 = 4^2 + 1^2$. Natürlich ist mit solchen Beispielen die zu beweisende allgemeine Aussage nicht erbracht.)

361024

Ein Würfel soll von einer Ebene so geschnitten werden, daß als Schnittfigur ein regelmäßiges n Eck entsteht.

Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geq 3$, für die das möglich ist!