36. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklassen 11–13
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

361321

Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, die Lösungen des Gleichungssystems

$$(x+y)^2 + 3(x+y) = 4, \tag{1}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{6} \tag{2}$$

sind.

361322

Trennt man in der Dezimaldarstellung einer natürlichen Zahl n, beginnend mit der letzten Ziffer, jeweils Gruppen von k Ziffern ab (wobei die letzte Gruppe auch aus weniger als k Ziffern bestehen kann) und bildet die Summe der von diesen Gruppen dargestellten Zahlen, so erhält man eine Zahl, die als *die Quersumme k-ter der Ordnung von n* , kurz $Q_k(n)$, bezeichnet sei. Beispielsweise ist

$$Q_3(1\,234\,056\,789) = 789 + 56 + 234 + 1 = 1\,080.$$

Jemand behauptet:

Zu jeder natürlichen Zahl $m > 5$ gibt es eine natürliche Zahl $k > 0$, mit der die folgende „Teilbarkeitsregel für m“ gilt: Eine natürliche Zahl n ist genau dann durch m teilbar, wenn $Q_k(n)$ durch m teilbar ist. (∗)

a) Man zeige, daß die Aussage (*) für $m = 10$ nicht gilt.
b) Man zeige, daß die Aussage (*) für $m = 37$ gilt.
c) Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen $m > 5$, für die die Aussage (*) gilt.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

361323

In der Ebene sei ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem gegeben. Weiterhin seien in der Ebene n Rechtecke gelegen, deren Seiten sämtlich zu den Koordinatenachsen parallel sind. Die Randlinien (bestehend aus den je vier Seiten) dieser Rechtecke zerlegen die Ebene in N Teilflächen.
Man bestimme für jede natürliche Zahl $n \geqslant 1$ den größten Wert, den N annehmen kann.

361324

a) Man beweise, daß für alle reellen Zahlen k und alle reellen Zahlen a, b mit $a \geqslant b \geqslant 0$ die Ungleichung

$$\sqrt{a^2+k^2}-\sqrt{b^2+k^2} \leqslant a-b$$

gilt.

b) Man beweise, daß für alle reellen Zahlen k, alle reellen Zahlen a, b mit $a \geqslant b \geqslant 0$ und alle positiven ganzen Zahlen n die Ungleichung

$$\sqrt[n]{a^n+k^2}-\sqrt[n]{b^n+k^2} \leqslant a-b$$

gilt.