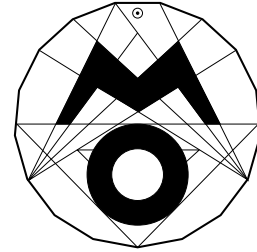


36. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklassen 8
Aufgaben – 1. Tag



© 1996 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

360831

- (a) Ermittle alle diejenigen Paare (a, b) natürlicher Zahlen, für die die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) gleichzeitig erfüllt sind!
- $a < 4$, (1)
 $a - b > 0$, (2)
 $a + b > 2$. (3)
- (b) Beweise, daß die Bedingungen (1), (2), (3) von keinem Paar (a, b) ganzer Zahlen erfüllt werden, in dem (mindestens) eine der beiden Zahlen a, b negativ ist!

Hinweis: Anders als in manchen Lehrbüchern wird hier auch die Zahl 0 als eine natürliche Zahl bezeichnet.

360832

- (a) Beweise, daß die Zahl $3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}$ durch 10 teilbar ist!
- (b) Untersuche, ob die Zahl $3 + 7 + 3^2 + 7^2 + 3^3 + 7^3 + \dots + 3^{100} + 7^{100}$ durch 10 teilbar ist!

360833

Über ein Dreieck ABC und eine Gerade g werden folgende Voraussetzungen gemacht:

- (1) Es gilt $|AC| = |BC|$.
- (2) Der Winkel BAC beträgt $64,5^\circ$.
- (3) Die Gerade g schneidet die Seite \overline{AC} in einem Punkt E zwischen A und C , sie schneidet die Seite \overline{BC} in einem Punkt F zwischen B und C , und sie schneidet die Verlängerung der Seite \overline{BA} über A hinaus in einem Punkt D .

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

(a) Ferner wird vorausgesetzt:

(4) Der Winkel EDA beträgt 42° .

Ermittle aus den Voraussetzungen (1) bis (4) die Größen der Winkel CEF und EFC !

(b) Nun wird die Voraussetzung (4) weggelassen. Stattdessen soll für den Winkel EDA eine andere Größe vorausgesetzt werden.

Ermittle alle Möglichkeiten, diese Größe so zu wählen, daß sich – zusammen mit den Voraussetzungen (1) bis (3) – eine Figur ergibt, in der das Dreieck EFC gleichschenkelig ist!