36. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklassen 8
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

360834

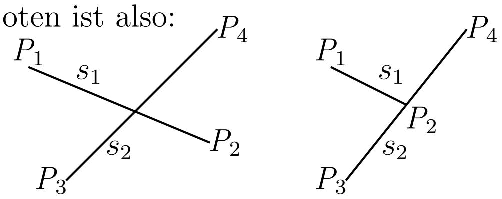
Zwei Kerzen von unterschiedlicher Dicke wurden zu Beginn eines Tages um 0 Uhr angezündet; damals hatten sie voneinander verschiedene Längen. An demselben Tag um 2 Uhr wurde beobachtet, daß sie einander gleiche Länge hatten. An demselben Tag um 3 Uhr 30 Minuten war die ursprünglich längere Kerze vollständig niedergebrannt, an demselben Tag erst um 5 Uhr auch die ursprünglich kürzere Kerze.

In welchem Verhältnis stand zu Anfang die Länge der kürzeren Kerze zur Länge der längeren?

360835

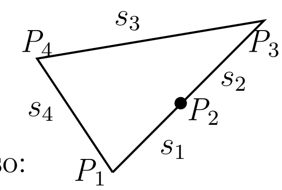
Im Innern eines Vierecks $ABCD$, in dem alle vier Innenwinkel kleiner als 180° sind, sei eine Anzahl n von Punkten $P_1, \ldots, P_n$ gelegen. Dann seien Strecken so eingezeichnet, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Von jedem der Punkte $P_1, \ldots, P_n$ geht mindestens eine der eingezeichneten Strecken aus;
- jede dieser Strecken verbindet entweder zwei der Punkte miteinander oder einen der Punkte A, B, C, D mit einem der Punkte $P_1, \ldots, P_n$;
- keine dieser Strecken hat mit einer anderen einen Punkt zwischen deren beiden Endpunkten gemeinsam;
  verboten ist also:



- das Viereck $ABCD$ wird durch die sämtlichen eingezeichneten Strecken vollständig in Dreiecke zerlegt;
- in jedem dieser Dreiecke enthält keine Seite zwischen ihren beiden Endpunkten noch einen weiteren der Punkte $P_1, \ldots, P_n$;

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

verboten ist also: 

(a) Zeichne je ein Beispiel für $n = 1, 2, 3, 4$ und stelle in jedem dieser Beispiele die Anzahl der Dreiecke fest, in die das Viereck zerlegt wird!

(b) Zeichne für zwei Beispiele, die sich voneinander nicht in der Wahl der beiden Punkte P_1, P_2 unterscheiden, bei denen aber das Viereck auf unterschiedliche Weise in Dreiecke zerlegt ist! Stelle fest, daß dennoch in beiden Beispielen dieselbe Anzahl von Dreiecken vorliegt!

(c) Nenne und beweise eine Formel, die – ebenfalls, wie in (b) für $n = 2$ festgestellt, unabhängig von der Wahl der einzelnen Strecken – für jede natürliche Zahl $n \geqslant 1$ die Anzahl der entstehenden Dreiecke angibt!

<u>360836</u>

(a) Zwei Trainer A und B wollen zwölf Sportler trainieren, A eine Trainingsgruppe von vier Sportlern, B eine von acht Sportlern. Wie viele verschiedene Aufteilungsmöglichkeitenen der zwölf Sportler in die zwei Trainingsgruppen für A und B gibt es insgesamt?

(b) Löse die gleiche Aufgabe, wenn drei Trainer A, B und C die zwölf Sportler trainieren, jeder eine Trainingsgruppe von vier Sportlern!

Hinweis:
1. Bei dieser Aufgabe würde eine bloße Aufzählung von Aufteilungen nur dann genügen, wenn ersichtlich gemacht wird, daß alle Aufteilungen erfaßt sind.
2. In dieser Aufgabe ist auch bei Verwendung einer als bekannt angegebenen allgemeinen Formel eine Begründung zu erbringen.