36. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 9
Aufgaben – 2. Tag

© 1996 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
`www.mathematik-olympiaden.de`. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

360934

Susanna und Ralf wollen ein Spiel für 16 Personen erfinden. Die Regeln sollen nach folgender Idee gestaltet werden: Jedem Mitspieler wird eine von 16 verschiedenen Zahlen zugeordnet. Dann wird mehrere Male durch Zufallsentscheidung eine dieser Zahlen hergestellt. Jedesmal erhält der Spieler, dem die hergestellte Zahl zugeordnet ist, einen Gewinnpunkt. Wer am Ende, nachdem dies $n \cdot 16$ mal durchgeführt wurde (mit einer großen Zahl n), die meisten Gewinnpunkte hat, ist Sieger.

Ralf schlägt als Zufallsentscheidung vor: „Man würfelt mit drei Würfeln und nimmt die Augensumme des Wurfes. Das ist dann stets eine der 16 Zahlen $3, 4, \ldots, 18$."

Susanna meint: „So wird das Spiel aber ungerecht. Denn es gibt z.B. nur eine Möglichkeit für die Augensumme 3, aber mehr als eine Möglichkeit für die Augensumme 10. Der Spieler, dem die 3 zugeordnet ist, hat also eine kleinere Chance, Gewinnpunkte zu erhalten, als der Spieler, dem die 10 zugeordnet ist."

Ralf meint: „Statt der drei Würfel müßte ein Körper mit 16 Seitenflächen benutzt werden, auf jeder dieser Flächen mit einer Zahl beschriftet. Aber leider gibt es kein regelmäßiges Polyeder mit 16 Seitenflächen."

Schließlich kommt Susanna auf die Idee: „Wir nehmen zwei regelmäßige Oktaeder und beschriften jede Seitenfläche mit einer der Zahlen $0, 1, \ldots, 8$. Die Beschriftung kann für beide Oktaeder unterschiedlich sein, und es müssen auch Zahlen mehrmals vorkommen (weil ja 16 Flächen zu beschriften sind, aber nur 9 Zahlen verwendet werden sollen). Diese Beschriftung richten wir so ein, daß jeder mögliche Wurf mit den zwei Oktaedern eine der Zahlen $1, 2, \ldots, 16$ als Summe hat, und zwar für jede dieser Zahlen mit gleichgroßer Chance ihres Vorkommens wie für jede andere dieser Zahlen."

Zeigen Sie durch ein Beispiel, daß eine solche Beschriftung möglich ist!

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

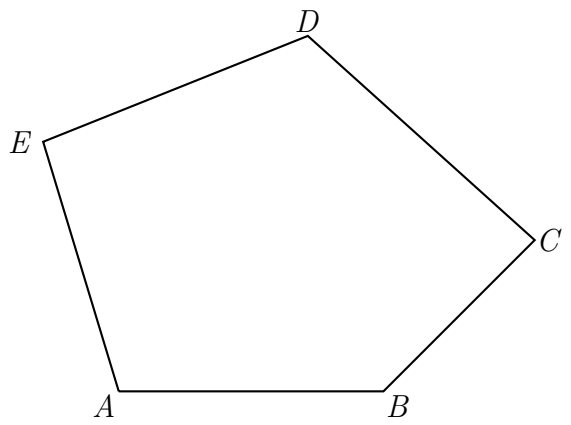
360935

Beweisen Sie, daß es für jede der Ziffern $a = 1, 2, \ldots, 9$ und für jede ganze Zahl $g \geqslant 1$ eine Zahl $N \geqslant 1$ gibt, mit der die folgende Aussage (*) gilt!

(*) Alle Zahlen, deren Zifferndarstellung $\underbrace{aaa \cdots aa}_{n\text{Ziffern}}$ mit $n > N$ lautet, lassen bei Division durch 2^g denselben Rest.

360936

Gegeben sei ein Fünfeck $ABCDE$.



Im Innern dieses Fünfecks sollen alle diejenigen Punkte P gefunden werden, mit denen die folgende Aussage gilt: Das Viereck $ABCP$ hat ebenso großen Flächeninhalt wie das Fünfeck $CDEAP$.

(a) Beschreiben Sie eine (von den gegebenen Punkten A, B, C, D, E ausgehende) Konstruktion, mit der sich eine Menge von Punkten P ergibt!

(b) Beweisen Sie, daß jeder Punkt P, der sich aus einer Konstruktion nach Ihrer Beschreibung ergibt, die Bedingung (gleicher Flächeninhalt von $ABCP$ und $CDEAP$) erfüllt!

(c) Führen Sie auf dem Arbeitsblatt die von Ihnen beschriebene Konstruktion durch!