36. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklassen 11–13
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

361331

Man ermittle, wie viele Möglichkeiten es insgesamt gibt, die Zahl 1997 als Summe von zwei oder mehr aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darzustellen. (Darstellungen mit 0 als erstem Summanden sollen nicht mitgezählt werden.)

361332

In einer Ebene E_1 ist ein Parallelogramm $A_1B_1C_1D_1$ gegeben, in einer Ebene E_2 ein Parallelogramm $A_2B_2C_2D_2$. Dabei sei $A_1 = A_2$.

Man zeige: Unter diesen Voraussetzungen gilt stets die Ungleichung $|B_1B_2| + |C_1C_2| \geqslant |D_1D_2|$.

361333

Von den nachstehenden Aufgaben Teil A und Teil B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

Teil A

Man ermittle alle diejenigen Paare (x, y) reeller Zahlen x und y, die Lösungen des folgenden Gleichungssystems (1), (2) sind:

$$\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} = xy, \tag{1}$$

$$x^5 + y^5 = 8xy. \tag{2}$$

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

Teil B

Man ermittle alle diejenigen reellwertigen Funktionen f, die den folgenden Bedingungen (1) , (2) , (3) genügen:

(1) Die Funktion f ist für alle von 0 verschiedenen reellen Zahlen x definiert.

(2) Für alle von 0 verschiedenen reellen Zahlen x gilt $f(-x) = f(x)$.

(3) Fü alle von 0 verschiedenen reellen Zahlen x und y mit $x + y \neq 0$ gilt

$$f\left(\frac{1}{x+y}\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right) + 2xy - 1\,.$$