36. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklassen 11–13
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

361334

Man ermittle alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)+1=0\,.$$

361335

In einem Quadrat $ABCD$ seien k_1 und k_2 die von A nach C verlaufenden Viertelkreisbögen mit den Mittelpunkten B bzw. D. Für jeden Punkt P auf k_1 sei t_1 die in P an k_1 gelegte Tangente; ferner sei t_2 die zu t_1 parallele Tangente an k_2. Die zu t_1 und t_2 senkrechten Geraden durch A bzw. C seien s_1 bzw. s_2. Die Geraden t_1, s_1, t_2, s_2 begrenzen ein Rechteck R.
Man beweise, daß der Umfang des Rechtecks R nicht von der Wahl des Punktes P abhängt.

361336

Man ermittle alle diejenigen Paare (m,n) nichtnegativer ganzer Zahlen m und n, für die 5^m+2^n+2 eine Quadratzahl ist.