36. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklassen 11–13
Aufgaben – 2. Tag

© 1996 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
`www.mathematik-olympiaden.de`. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

361344

Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) reeller Zahlen x, y, z, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$x^3 = 2y - 1 \tag{1}$$
$$y^3 = z - 1 \tag{2}$$
$$z^3 = 2x - 1 \tag{3}$$

361345

Von n in einer Ebene liegenden Kreisscheiben, unter denen sich auch solche befinden können, die einander überlappen, wird vorausgesetzt: Die Vereinigungsmenge dieser Kreisscheiben habe den Flächeninhalt 1.

Man beweise, daß es unter dieser Voraussetzung stets möglich ist, aus den Kreisscheiben eine Teilmenge von paarweise disjunkten Scheiben so auszuwählen, daß die Summe der Flächeninhalte der ausgewählten Scheiben größer als $\frac{1}{9}$ ist.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

361346

Von den nachstehenden Aufgaben Teil A und Teil B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

Teil A

Es seien f und g die durch

$$f(x) = x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 1,$$
$$g(x) = x^5 + 5x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 1$$

definierten Funktionen.

Man ermittle alle diejenigen Primzahlen p, zu denen es (mindestens) eine natürliche Zahl x mit $0 \leqslant x < p$ gibt, für die sowohl die Zahl $f(x)$ als auch die Zahl $g(x)$ durch p teilbar ist. Zu jeder solchen Primzahl p ermittle man alle natürlichen Zahlen x, die diese Bedingungen erfüllen.

Teil B

Zur näherungsweisen Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks wird folgendes Verfahren vorgeschlagen: Auf einer Kreislinie wähle man fünf Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 so, daß sie die Eckpunkte eines sonst beliebigen konvexen Fünfecks $P_1P_2P_3P_4P_5$ sind. Ferner wähle man eine beliebige positive Zahl ε als Fehlerschranke. Nun führe man folgende Arbeitsschritte durch:

(1) Führe die weiteren Bezeichnungen $P_0 := P_5$ und $P_6 := P_1$ ein und konstruiere dann für $j = 1, \ldots, 5$ den Punkt Q_j als Mittelpunkt desjenigen Kreisbogens, der P_{j-1} mit P_{j+1} verbindet und durch P_j geht.

(2) Benenne das so entstandene Fünfeck $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5$ in $P_1P_2P_3P_4P_5$ um.

(3) Betrachte für $j = 1, \ldots, 5$ jeweils die Länge des Bogens, der von P_j nach P_{j+1} (aber nicht über die anderen P_i) führt. Wenn diese Bogenlängen die Bedingung erfüllen, daß die Differenz aus der größten und der kleinsten dieser Bogenlängen kleiner als ε ist, dann beende das Verfahren; andernfalls setze mit Schritt (1) fort.

Man beweise, daß dieses Verfahren für jede Wahl der Ausgangspunkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 und der Fehlerschranke ε nach endlich vielen Schritten abbricht.