

37. Mathematik-Olympiade

1. Stufe (Schulrunde)

Klassen 7 und 8

Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Stzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Es wird empfohlen, vier der folgenden sechs Aufgaben zur Bearbeitung auszuwählen.

370811

Katharina macht Bananeneis. Sie zerdrückt mit der Gabel zwei geschelte Bananen, die zusammen 210 g wiegen. Sie fgt 250 g Sahne hinzu sowie 125 g Joghurt und 75 g Zucker. Dazu kommt auerdem noch ein biichen Zitronensaft, dessen Gewicht hier vernachlässigt wird. Alles wird verquirlt. Die so hergestellte Creme mu jetzt in die Eismaschine, aber die Menge ist fr die Eismaschine zu gro. Katharina nimmt nur $\frac{2}{3}$ der Creme und lt sie gefrieren. Aus dem Rest will Katharina eine zweite Sorte Eis herstellen. Sie fgt noch einmal ein biichen Zitronensaft, 125 g Joghurt und 15 g Zucker hinzu. Wieder wird gut verquirlt und dann erst einmal reichlich probiert, dabei wandern 36 g in Katharinas Magen. Sie meint, da die Creme ein biichen zu sauer ist, und gibt noch einmal 36 g Zucker hinzu. Berechne in beiden Eissorten den Bananenanteil und den Zuckeranteil in Form je eines so weit wie mglich gekrzten Bruches!

<Bemerkung: Das Rezept ist sehr zu empfehlen.>

370812

Ein Wrfel der Kantenlnge 12 cm steht auf der Tischplatte. Auf der Deckflche dieses Wrfels steht, ohne ber diese Deckflche hinauszuragen, ein kleinerer Wrfel. Nun wird festgestellt: Die nicht verdeckten Oberflchenteile beider Wrfel ergeben zusammen einen ebenso groen Flcheninhalt wie die gesamte Oberflche des groeren Wrfels. Wie gro ist die Kantenlnge des kleineren Wrfels?

370813

Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC und das Dreieck PQR , wobei P, Q, R in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CA sind!

- (a) Gib einen Weg an, der im Punkt A beginnt und auf dem die gezeichnete Figur „in einem Zuge“ durchlaufen wird (d.h., ohne den Zeichenstift abzusetzen), wobei jede der 9 Strecken $AP, AR, BP, BQ, CQ, CR, PQ, PR, QR$ genau einmal durchlaufen wird!

- (b) Ermittle alle „in einem Zuge“ von A nach B fihrenden Wege mit der Eigenschaft, da in dem betreffenden Weg jede der 9 Strecken hchstens einmal durchlaufen wird!

Die gesuchten Wege kannst du beschreiben, indem du in der Reihenfolge des Durchlaufens die erreichten Punkte aufzhlst. (Hinweis: Es ist zugelassen, da einzelne dieser *Punkte* auf einem Weg mehrfach erreicht werden.)

370814

Ermittle alle Mglichkeiten, in dem Schema

$$\begin{array}{rcccc} & & O & P & A \\ + & & O & M & A \\ \hline = & P & A & A & R \end{array}$$

die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, da eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht! Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

370815

Die Geometrie, die wir in der Schule lernen, war grtenteils schon den alten Griechen bekannt. Die geometrischen Methoden waren so weit ausgebaut, da Aufgaben, die wir heute rechnerisch lsen, mit geometrischen Verfahren gelst wurden. Ein Beispiel bietet die

Aufgabe: Gegeben sind zwei natrliche Zahlen n und p . Gesucht ist das Ergebnis der Division $n : p$.

Lsung: Whle eine Lngeneinheit **LE** und zwei natrliche Zahlen a und b , fr die $a \cdot b = n$ gilt. Konstruiere dann ein Rechteck $ABCD$, in dem die Seiten AB und AD die Lngen a **LE** bzw. b **LE** haben. Auf der Verlngerung von DC ber C hinaus konstruiere nun denjenigen Punkt P , der von C den Abstand p **LE** hat. Konstruiere weiter den Schnittpunkt S der Geraden durch A, D mit der Geraden durch B, P . Ergnze schlielich S, D, P zum Rechteck $SDPT$ und bringe dessen Seite TP zum Schnitt Q mit der Geraden durch A, B . Hat dann die Strecke TQ die Lnge q **LE**, so ist q die gesuchte Zahl $q = n : p$.

- (a) Fihre eine solche Konstruktion fr die Divisionsaufgabe $24 : 5$ aus!
- (b) Beweise, da die Konstruktion fr jede Divisionsaufgabe zum richtigen Ergebnis $q = n : p$ fhren mu!
- (c) Obwohl die Konstruktion, wie in (b) zu beweisen, theoretisch stets zum richtigen Ergebnis fhrt, gibt es doch Flle, in denen die Vorgaben n und p praktisch sehr ungnstig fr die Konstruktion sind. Kennzeichne solche Flle und erlutere, wodurch eine solche ungnstige Eigenschaft verursacht wird!

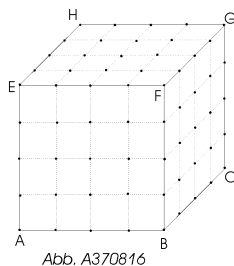
370816 Abbildung A370816 zeigt einen Wrfel $ABCDEFGH$ mit der Kantenlnge 4 cm. Zugleich sind dort *Gitterpunkte* hervorgehoben. Der Abstand je zweier benachbarter Gitterpunkte von links nach rechts, von vorn nach hinten und von unten

nach oben beträgt jeweils 1 cm. Auch im Innern des Würfels und auf seinen nicht sichtbaren Flächen denke man sich derartige Gitterpunkte angebracht; insgesamt kommen also 125 Gitterpunkte vor.

Es sollen nun Pyramiden betrachtet werden, die folgende Eigenschaften haben:

- (1) Alle Eckpunkte der Pyramide sind Gitterpunkte.
- (2) Die Grundfläche der Pyramide ist ein Quadrat der Seitenlänge 2 cm.
- (3) Die Körperhöhe der Pyramide beträgt höchstens 2 cm, der Fußpunkt der Körperhöhe liegt im Innern oder auf dem Rand der Grundfläche.

Zwei Pyramiden werden genau dann als *nicht voneinander verschieden* betrachtet, wenn die Längen a_1, a_2, \dots, a_8 der Kanten der einen Pyramide und die *in geeigneter Reihenfolge* angegebenen Längen a'_1, a'_2, \dots, a'_8 der Kanten der anderen Pyramide die Gleichungen $a_1 = a'_1, a_2 = a'_2, \dots, a_8 = a'_8$ erfüllen.



- (a) Weise nach, da es genau sechs Pyramiden gibt, die im Sinne dieser Beschreibung voneinander verschieden sind und die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen! Fertige von drei verschiedenen dieser Pyramiden je ein Schrägbild an!
- (b) Für jede der sechs in (a) genannten Pyramiden sei nun folgende Aufgabe gestellt:

Man soll genügend viele Exemplare der betreffenden Pyramide herstellen, alle im Sinne der Beschreibung nicht voneinander verschieden. Von diesen Exemplaren soll man möglichst viele in dem (hohl gedachten) Würfel $ABCDEFGH$ unterbringen. Sie dürfen nicht zerlegt oder verformt werden, sich gegenseitig nicht durchdringen und nirgends über den Würfel hinausragen.

Löse diese sechs Aufgaben, indem du erklärst, wie du die Pyramiden in den Würfel hineinpacken würdest! Ein Beweis, dass jeweils nicht noch mehr hineinpassen, wird nicht verlangt. Auf welche Anzahlen hineinpassender Pyramiden bist du gekommen?