Aufgabenausschu des Mathematik-Olympiaden e.V.

37. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klassen 9 und 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lsungsweg mit Begrndungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Stzen dargestellt werden. Zur Lsungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, gengt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzufhren.*

Es wird empfohlen, vier der nachstehenden Aufgaben zur Bearbeitung auszuwhlen.

371011
Kai bemerkt: Fr die Beispiele $5^2 - 4^2 = 3^2$ und $13^2 - 12^2 = 5^2$ gilt: Die Differenz zwischen dem Quadrat einer ungeraden Zahl u ($u = 5$ bzw. $u = 13$) und der nchstkleineren Quadratzahl ist wieder eine Quadratzahl.

(a) Nennen Sie drei weitere Beispiele ungerader Zahlen u, fr die diese Aussage ebenfalls gilt!

(b) Gilt diese Aussage fr alle ungeraden Zahlen u ?

(c) Gibt es auch Beispiele dafr, da die Differenz zwischen dem Quadrat einer geraden Zahl g und der nchstkleineren Quadratzahl wieder eine Quadratzahl ist?

371012

(a) Geben Sie ein Beispiel dafr, da es mglich ist, eine natrliche Zahl n mit $4 \leq n \leq 20$ als Summe natrlicher Zahlen darzustellen, deren Kehrwerte die Summe 1 ergeben!

(b) Beschreiben und begrnden Sie ein Verfahren, das fr *jede* natrliche Zahl n mit $4 \leq n \leq 20$ *alle* derartigen Darstellungen ergibt! Setzen Sie ein solches Verfahren auch in ein Computerprogramm um!

371013 Zur Vorbereitung eines Schulausflugs wurde festgestellt: Es stehen mehrere Pkw mit je 5 Sitzpltzen zur Verfgung; ferner knnen Busse mit je 20 bzw. je 22 Sitzpltzen gemietet werden. An dem Ausflug sollen 482 Schler und 30 Lehrer teilnehmen. Alle Sitzpltze sollen genutzt werden; in jedem Fahrzeug soll genau ein Lehrer mitfahren. Ermitteln Sie alle Mglichkeiten, Fahrzeuge der genannten Arten so zu belegen, da diese Bedingungen erfllt werden!

371014 Bernd und Klaus haben vereinbart, sich verschlsselte Briefe per email zu senden, indem sie die Computer ihrer Schulen dazu nutzen knnen. Zur Codierung vereinbaren sie drei Tabellen:

Tabelle 1:

Zeichen	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
Code	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Tabelle 2:

Zeichen	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t
Code	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Tabelle 3:

Zeichen	u	v	w	x	y	z	.	,	?	Leerzeichen
Code	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Fr ihre Texte verwenden sie nur Zeichen, die in den Tabellen vorkommen (also ohne Unterscheidung zwischen Gro- und Kleischreibung bei $a, \ldots, z$ und $A, \ldots, Z$). Jeder verschlsselte Text beginnt mit einem Code-Schalter: ? fr Tabelle 1, ! fr Tabelle 2 und # fr Tabelle 3. Dann kommen die Code-Ziffern aus der damit erffneten Tabelle, solange die zu codierenden Zeichen in dieser Tabelle stehen. Will man die Tabelle wechseln, so geschieht dies durch den betreffenden Code-Schalter. Zum Beispiel wird die Nachricht „Anton ist doof“ durch ? 0 ! 3 9 4 3 # 9 ? 8 ! 8 9 # 9 ? 3 ! 4 4 ? 5 verschlsselt.
Sie halten dieses System der Verschlsselung fr gut; jedoch das herausragende Aussehen der Code-Schalter fr bedenklich. Deswegen berlegen sie, ob man nach demselben System - unter Nutzung einer geeigneten Anzahl von Tabellen - verschlsseln kann, wenn sowohl fr Code-Schalter als auch fr die Codes der einzelnen Zeichen nur Ziffern $0, \ldots, 9$ verwendet werden. Sie erreichen jedoch bei ihren Versuchen, eine solche Verschlsselung aufzustellen, nicht einmal eine Mglichkeit, die 26 Zeichen $a, \ldots, z$ zu codieren. Welches ist die grte Anzahl von Zeichen, die man mit einem solchen Verschlsselungssystem codieren kann, wenn insgesamt nur Ziffern verwendet werden sollen?

371015 Auf den Kanten einer dreiseitigen Pyramide seien die Kantenmittelpunkte folgendermaen bezeichnet: Sind P, Q die Endpunkte einer Kante, so sei M_{PQ} der Mittelpunkt dieser Kante. Wie viele verschiedene Ebenen, die durch jeweils genau vier der Punkte $M_{AB}, M_{AC}, M_{AD}, M_{BC}, M_{BA}, M_{CD}$ gehen, gibt es insgesamt?

371016 Beweisen Sie, da fr jede positive ganze Zahl n die Ungleichungen

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$$

gelten!