Aufgabenausschuß des Mathematik-Olympiaden e.V.

37. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 11 bis 13
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

371321

Bekanntlich bezeichnet man in jedem rechtwinkligen Dreieck die beiden Teilstrecken, in die die Hypotenuse durch den Fußpunkt der auf ihr senkrechten Höhe h zerlegt wird, kurz als die beiden *Hypotenusenabschnitte*.
Man beweise: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den beiden Hypotenusenabschnitten größer oder gleich dem doppelten Flächeninhalt des Quadrates über der Höhe h.

371322

Man ermittle zu jeder reellen Zahl a alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = a.$$

371323 Man ermittle alle diejenigen Tripel a, b, c reeller Zahlen, die der folgenden Bedingung genügen:

> Für die durch $p(x) = x^3 - ax^2 + bx - c$ definierte Funktion p gelten die Gleichungen $p(a) = 0, p(b) = 0$ und $p(c) = 0$.

371324

Man beweise: Wenn p und q natürliche Zahlen sind, für die

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \cdots - \frac{1}{1330} + \frac{1}{1331} = \frac{p}{q}$$

gilt, dann ist p durch 1997 teilbar.