Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionsaufgaben) Hilfslinien soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

370831

Der Mathematiker LEONHARD EULER (1707 - 1783) gab 1770 ein leicht verständliches Buch „Vollständige Anleitung zur Algebra“ heraus, das mehr als 100 Jahre lang eines der beliebtesten und meist gelesenen Bücher war. Die folgende Aufgabe stammt aus diesem Buch:
Eine Bäuerin tauschte Käse gegen Hühner. Für 2 Käse erhielt sie jeweils 3 Hühner. Die eingetauschten Hühner legten Eier. Die Anzahl der Eier, die jedes dieser Hühner legte, war gleich dem dritten Teil der Anzahl der eingetauschten Hühner. Mit diesen Eiern ging die Bäuerin auf den Markt. Die Anzahl der Pfennige, die sie für 9 Eier erhielt, war gleich der Anzahl der Eier, die jedes der eingetauschten Hühner gelegt hatte. Die Bäuerin erhielt für die verkauften Eier genau 72 Pfennige.
Weise nach, daß sich auf Grund dieser Angaben folgende Fragen eindeutig beantworten lassen:

(a) Wie viele Hühner hat sie für den getauschten Käse erhalten ?

(b) Wie viele Stück Käse hat die Bäuerin getauscht ?

(c) Wie viele Eier hat die Bäuerin auf dem Markt verkauft ?

370832

Über ein Dreieck ABC und eine Gerade g werden folgende Voraussetzungen gemacht:

(1) Es gilt $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = a$.

(2) Die Gerade g schneidet die Seite AC in einem Punkt D sowie die Seite BC in einem Punkt E so, daß DE parallel zu AB ist.

(3) Der Umfang des Dreiecks DEC ist gleich dem Umfang des Vierecks $ABED$.

(a) Ermittle aus den Voraussetzungen (1) bis (3) das Streckenverhältnis $\overline{AD} : \overline{AC}$ und das Streckenverhältnis $\overline{BE} : \overline{BC}$!
(b) In welchem Verhältnis steht der Inhalt des Dreiecks DEC zum Inhalt des Vierecks $ABED$?

370833

Über drei rationale Zahlen werden folgende Aussagen gemacht:

(1) Der Quotient aus der ersten und der dritten Zahl ist positiv.

(2) Die Summe der ersten und der dritten Zahl ist negativ.

Das Produkt aller drei Zahlen ist positiv.
(a) Was läßt sich aufgrund dieser drei Bedingungen über die Vorzeichen der drei Zahlen aussagen ?
Es gelten ferner folgende Aussagen:

(4) Subtrahiert man die dritte von der ersten Zahl, so erhält man die zweite.

(5) Bildet man die Kehrwerte der drei Zahlen, so erhält man drei ganze Zahlen.

(6) Die Summe aller drei Zahlen beträgt $-\frac{1}{3}$. Dieses Ergebnis erhält man auch,wenn man die zweite durch die dritte Zahl teilt.

(b) Ermittle alle Tripel rationaler Zahlen, die die Bedingungen (1) bis (6) gleichzeitig erfüllen !