37. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 8
Aufgaben – 1. Tag

370841
Ermittle alle Primzahlen a, b, c,d, für die folgende Bedingungen gelten:

(1) $a + b = c$
(2) $2a + b = d$

370842 Im Land Stochastika lebt eine mathematisch geschulte Spinne. Ihr Spinnennetz hat neun Knoten, die in der Weise, wie es die Abbildung A 370842 zeigt, durch Fäden miteinander verbunden sind. Die Spinne sitze in der Mitte. Nach jeweils 10 Minuten ist sie auf einem Faden von einem Knoten zum nächsten gekrochen. Dabei bevorzugt sie keine der möglichen Richtungen. Sie kehrt auch niemals auf demselben Weg zurück, auf dem sie zuletzt gekommen ist. Zu welchem Zeitpunkt innerhalb eines Zeitraumes von 90 Minuten ist die Wahrscheinlichkeit am größten, daß sich die Spinne wieder in der Mitte des Netzes befindet? Wie groß ist diese Wahrscheinlichkeit?

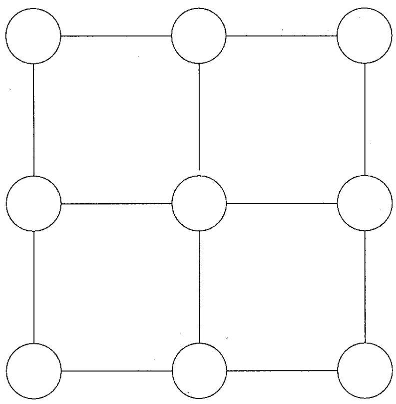

Abb. A 370842

370843
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC sei die Kathete BC doppelt so lang wie die Kathete AC. Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden dieses Dreiecks sei mit M bezeichnet.
Zu den drei Seiten dieses Dreiecks seien Parallelen durch M gezeichnet. Die Parallele zu AB schneide AC in D und BC in E; die Parallele zu BC schneide AC in F und AB in G; die Parallele zu AC schneide AB in H und BC in I.

(a) Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen das Viereck $AHMD$ stets ein Rhombus ist und daß $2\,\overline{DM} = \overline{ME}$ gilt !

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

(b) Beweise, daß es unter den Dreiecken HGM, DMF und MEI stets zwei Dreiecke gibt, die sich derartig zusammenfügen lassen, daß sie ein zum dritten Dreieck kongruentes Dreieck ergeben !

(c) Zu konstruieren sind ein Dreieck ABC und dessen Inkreismittelpunkt M, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) $\overline{< ACB} = 90°$
(2) $\overline{BC} = 2\overline{AC}$
(3) $\overline{MK} = \rho = 2,5cm$, wobei K auf AB liegt
(4) MK ist ein Inkreisradius des Dreiecks ABC.

Beschreibe die Konstruktion und führe die Konstruktion durch!
Beweise: Wenn ein Dreieck wie beschrieben konstruiert wurde, dann erfüllt es die Bedingungen (1) bis (4).

Hinweis: Der folgende Satz darf (ohne Beweis) als Hilfsmittel verwendet werden:
Wenn zwei Dreiecke in zwei gleichliegenden Innenwinkeln übereinstimmen, dann sind die Verhältnisse der Längen entsprechender Seiten dieser Dreiecke gleich.