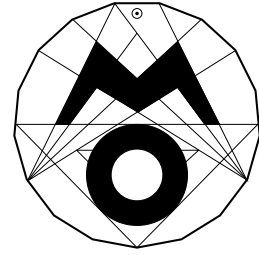


37. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 9
Aufgaben – 1. Tag



© 2015 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

370941

Beweisen Sie folgende Aussage:

Sind $p = n^{n^n} + n^n + n + 1$ und n Primzahlen, so ist auch $p = n^{n^n} - n^n + n - 1$ eine Primzahl.

370942

Einer Halbkugel mit dem Radius r werde ein Tetraeder $ABCD$ so eingeschrieben, daß die Eckpunkte A, B, C auf der Peripherie der Grundfläche der Halbkugel liegen und D im Scheitelpunkt der Halbkugel liegt. Das Volumen des Tetraeders sei mit V , der Umfang des Dreiecks ABC mit u bezeichnet.

Beweisen Sie, daß in dem Fall, in dem das Volumen des Tetraeders maximal ist, gilt

$$V = \frac{u^3}{324} \tag{1}$$

370943

Andreas experimentiert mit einem Computerprogramm. Das Programm wählt aus den natürlichen Zahlen von 1 bis 200 zufällig 101 Zahlen aus und sucht unter diesen nach einem Zahlenpaar für, welches die eine Zahl Teiler der anderen ist. Stets erfolgt die Ausgabe eines solchen Zahlenpaars. Andreas wundert sich darüber.

Brigitte behauptet, daß es immer ein solches Zahlenpaar gibt. Das könne sie auch ohne Computerprogramm beweisen, z.B. unter geschickter Verwendung der Tatsache, daß es unter den Zahlen ja nur 100 gerade Zahlen gibt. Welchen Beweis könnte Brigitte für ihre Behauptung führen ?