37. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklassen 11 – 13
Aufgaben – 2. Tag

371344
Es sei a eine positive reelle Zahl. Zeigen Sie, daß das reelle Polynom

$$p(x) = a^3x^3 + a^2x^2 + ax + a$$

nur für $a = 1$ ganzzahlige reelle Nullstellen besitzt, und bestimmen Sie diese.

371345
Die Zahlenfolge (a_n) ist gegeben durch

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$

sowie $$a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$$
für jede ganze Zahl $k \geq 0$.

Man beweise, daß für jede ganze Zahl $n \geq 0$ die Ungleichung

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{2^k} < 2$$

gilt.

Von den nachstehenden Aufgaben 371346A und 371346B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

371346A
Man ermittle alle reellen Lösungen $(x; y)$ des Gleichungssystems

$$x^5 = 21x^3 + y^3 \qquad (1)$$
$$y^5 = x^3 + 21y^3. \qquad (2)$$

371346B
Beweisen Sie, daß für alle ungeraden Zahlen $n \geq 3$ gilt: Wenn sich eine konvexe Vierecksfläche $ABCD$ durch Geraden in n Sehnenvierecke zerlegen läßt, dann ist das Viereck $ABCD$ ein Sehnenviereck.

Hinweis: „Zerlegen" bedeutet: Alle Punkte, die zu einer der n Sehnenvierecksflächen gehören, sind Punkte der Vierecksfläche $ABCD$, jeder Punkt der Fläche von $ABCD$ gehört mindestens einer der n Sehnenvierecksflächen an. Zwei verschiedene dieser Sehnenvierecksflächen haben keine inneren Punkte gemeinsam.