Aufgabenausschuß des Mathematik-Olympiaden e.V.

38. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

380821

Hans hat von seinen Großeltern 1000 DM geschenkt bekommen. Den Betrag darf er aber nicht ausgeben, sondern soll ihn mindestens zwei Jahre lang sparen. Nun sucht er eine Bank, die ihm in zwei Jahren möglichst viel Zinsen zahlt.

(a) Bank A macht ein Angebot: 4% Zinsen für das erste Jahr. Die Zinsen werden nach einem Jahr dem Kapital zugerechnet. Für das zweite Jahr gibt es dann 6% Zinsen.
Von Bank B erhält er das Angebot: Für das erste Jahr 3% Zinsen, auch hier werden die Zinsen nach einem Jahr dem Kapital zugerechnet. Für das zweite Jahr beträgt der Zinssatz dann 7%.
Welches Angebot ist günstiger ?

(b) Fritz meint, er hätte noch eine bessere Möglichkeit bei einer dritten Bank. Diese zahlt jedes Jahr denselben Jahreszins. Fritz hat dort 300 DM für 2 Jahre angelegt und am Ende dieser zwei Jahre insgesamt 330,75 DM zurückerhalten.
Wieviel Zinsen bekäme Hans, wenn er sein Geld bei dieser Bank anlegen würde ?

380822

Frau Neumann möchte für eine Familienfeier Wein kaufen. Im Getränkemarkt gibt es zwei ihrer Lieblingssorten; bei der einen Sorte kostet jede Flasche 3,50 DM, bei der anderen 8,50 DM. Frau Neumann möchte von jeder dieser Sorten mindestens eine Flasche kaufen, andere Sorten aber nicht. Insgesamt will sie genau 75 DM für den Wein ausgeben.
Ermittle alle Möglichkeiten, welche Anzahlen von Flaschen der beiden Sorten gewählt werden können, um die genannten Bedingungen zu erfüllen !

380823

Es sei ABCD ein Rechteck mit $\overline{AB} = \overline{CD} = a$ und $\overline{BC} = \overline{AD} = 1{,}5\,a$. Dieses Rechteck soll derart in fünf Dreiecke D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 mit gleichlanger Höhe zerlegt werden, daß folgende Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind :

(1) D_1 und D_2 haben denselben Flächeninhalt F_1.
(2) D_3, D_4, D_5 haben denselben Flächeninhalt F_2.
(3) $F_1 > F_2$.

(a) Gib eine mögliche Zerlegung an ! Weise nach, daß die von dir angegebene Zerlegung die Forderungen der Aufgabe erfüllt !

(b) Ermittle bei der von dir angegebenen Zerlegung F_1 und F_2 in Abhängigkeit von a und ermittle außerdem das Verhältnis $F_1 : F_2$!

(c) Anstelle der Voraussetzung (3) werde nun vorausgesetzt:
(3´) $F_1 < F_2$
Gib auch für diesen Fall eine mögliche Zerlegung an und weise nach, daß die von dir angegebene Zerlegung die Forderung der Aufgabe erfüllt!

380824

Gegeben seien die periodischen Dezimalbrüche

$p = 0,\overline{3456}$, $q = 0,3\overline{456}$, $r = 0,34\overline{56}$, $s = 0,345\overline{6}$.

(a) Ermittle für jeden dieser vier Dezimalbrüche diejenige Ziffer, die an der 1998-ten Stelle nach dem Komma steht !

(b) Wir betrachten die 4 Ziffern, die in den 4 Dezimalbrüchen an der k-ten Stelle nach dem Komma stehen. Welches Ereignis tritt bis zur Stelle k=1998 häufiger ein:
(1) Keine dieser vier Ziffern ist eine 5.
(2) Mindestens drei der vier Ziffern sind eine 6.

(c) Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die folgende Aussage gilt
Die genannten vier Dezimalbrüche haben an der n-ten Stelle nach dem Komma dieselbe Ziffer.

(d) Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen m, für die folgende Aussage gilt:
Keine zwei der genannten vier Dezimalbrüche haben an der m-ten Stelle nach dem Komma dieselbe Ziffer.