



Aufgabenausschuß des Mathematik-Olympiaden e.V.

38. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Länderrunde)
Klasse 6
Aufgaben
1. Tag

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

380631

Ein Spatz, eine Amsel und ein Falke planen einen Flug vom heimatischen Kirchturm zu einem Ziel am offenen Meer. Der Spatz sagt : "Für 10 km brauche ich 20 Minuten." Die Amsel weiß, daß sie für 60 km eine Stunde und zwölf Minuten benötigt. Der Falke kann die gesamte Strecke von 120 km bis zum Ziel am Meer in einer Stunde fliegen. Alle drei Vögel behalten ihre Geschwindigkeit auf dem ganzen Flug bei.

- Welche Strecke durchfliegen Spatz und Amsel jeweils in einer Stunde ?
- Wann erreichen die drei Vögel jeweils ihr Ziel am Meer, wenn sie am Kirchturm gemeinsam um 7 Uhr gestartet sind und keine Pause einlegen ?
- Noch am gleichen Tag wollen die Vögel wieder zurückfliegen. Sie sind aber alle noch etwas geschwächt, so daß die Geschwindigkeit des Spatzen um $\frac{1}{5}$ sinkt (das heißt also, in 20 Minuten kommt er nur noch 8 km weit); Amsel und Falke sind um $\frac{1}{3}$ langsamer. Wann müssen sie jeweils aufbrechen, wenn sie gemeinsam um 20 Uhr wieder ihren Kirchturm erreichen wollen ?

380632

Anna, Benjamin, Carsten, Dorothee und Eva vergleichen ihr Alter. Dabei stellt sich folgendes heraus:

- Jedes Kind hat ein anderes Alter.
- Dorothee ist doppelt so alt wie Eva.
- Benjamins Alter ist eine Primzahl, er ist jünger als Carsten, aber nicht das jüngste Kind.
- Carsten ist halb so alt wie Dorothee und Eva zusammen.
- Evas Alter liegt zwischen zwei einstelligen Primzahlen.
- Anna ist jünger als Dorothee und ihr Alter ist durch 5 teilbar, aber sie ist auch nicht das jüngste Kind.

Wie alt ist jedes der fünf Kinder ? Begründe !

380633

Du erinnerst Dich sicherlich an die Aufgabe aus der 2. Stufe:

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$

Allgemein gilt offensichtlich :

$$1 + 3 + 5 + \dots + u = a^2$$

wobei u eine beliebige ungerade Zahl ist.

- (a) Berechne jeweils a^2 und a !

I. $1 + 3 + 5 + \dots + 29 = a^2$

II. $1 + 3 + 5 + \dots + 103 = a^2$

- (b) Michael sagt zu Amelie, daß er eine Formel gefunden hat, mit der man a berechnen kann, wenn man die letzte ungerade Zahl u einer solchen Summe kennt. Gib diese Formel an und weise nach, daß sie für $u = 29$ und für $u = 103$ die von dir berechneten Resultate liefert !

- (c) Amelie überlegt weiter und behauptet: "Jede ungerade Zahl läßt sich als Differenz zweier Quadratzahlen schreiben." Weise für die drei ungeraden Zahlen 7, 17 und 217 nach, dass Amelie Recht hat !

- (d) Während Michael noch nachdenkt, arbeitet Amelie schon weiter. Sie schreibt folgende richtige Gleichungen hin:

$$4 = 2^2 - 0^2, \quad 8 = 3^2 - 1^2, \quad 12 = 4^2 - 2^2, \quad 16 = 4^2 - 0^2, \quad 20 = 6^2 - 4, \quad 32 = 6^2 - 2^2.$$

Sie teilt Michael mit : "Ich vermute, dass man jede Zahl, die sich durch 4 teilen lässt, als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen kann !"

Zeige, daß Amelie recht hat.