Aufgabenausschuß des Mathematik-Olympiaden e.V.

38. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Länderrunde)
Klasse 9
Aufgaben
2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

380934

Man ermittle alle diejenigen Paare (x, y) natürlicher Zahlen x, y mit $x + y = 627$, zu denen zwei Primzahlen p und q so existieren, daß $x \cdot q = y \cdot p$ gilt.

380935

Jörn behauptet als Scherzaufgabe, die Zahl $z = 49858$ sei gleich der Zahl $2 \cdot z$ (obwohl diese Zahl z ja offensichtlich verschieden von der einzigen Lösung $z = 0$ der Gleichung $z = 2 \cdot z$ ist). Nora nennt eine Lösungsidee: Man verstehe die eine der Ziffernangaben für z bzw. $2 \cdot z$ im Dezimalsystem, die andere im Stellenwertsystem mit einer von 10 verschiedenen Basis B.
Man untersuche, ob diese Idee zur behaupteten Gleichheit führt. Ist das der Fall, so ermittle man alle diejenigen Basen B, für die das zutrifft.

380936

Auf der Seite BC eines Dreiecks ABC liege ein Punkt M. Ferner seien ein Punkt N auf AB und ein Punkt P auf AC so gelegen, daß $NM \parallel AC$ und $PM \parallel AB$ gilt. Man beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets die beiden folgenden Aussagen (a) und (b) gelten:

(a) Genau dann, wenn das Dreieck ABC gleichschenklig mit $\overline{AB} = \overline{AC}$ ist, gilt die Gleichung $\overline{AN} + \overline{AP} = \overline{AB}$.

(b) Ohne weitere Voraussetzungen über das Dreieck (wie die eben in (a) gestellte) gilt für die Verhältnisse $p = \overline{AN} : \overline{AB}$ und $q = \overline{AP} : \overline{AC}$ stets die Gleichung $p + q = 1$.

Hinweis: Der folgende Satz darf (ohne Beweis) als Hilfsmittel verwendet werden:
Wenn zwei Dreiecke in zwei entsprechenden Winkeln übereinstimmen, dann stimmen sie in den Verhältnissen entsprechender Seiten überein.