Aufgabenausschuß des Mathematik-Olympiaden e.V.

38. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Länderrunde)
Klasse 10
Aufgaben
1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

381031
Gert und Uta spielen das folgende Spiel:
Auf dem Tisch liegen 1999 Spielsteine, von denen Gert und Uta abwechselnd Steine wegnehmen.
Gert muß 2, 4, 6, 8 oder 10 Steine in einem Zug wegnehmen, Uta 1, 3, 5, 7 oder 9 Steine.
Wer den letzten Stein weggenommen hat, hat gewonnen.

Man beweise, daß Gert, wenn er das Spiel beginnt, stets so spielen kann, daß er das Spiel gewinnt.

381032
Jemand bildet aus zwei beliebigen rationalen Zahlen x, y mit $x \neq -y$ zunächst die Zahl $z = \frac{xy}{x+y}$ und dann die Zahl $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Man beweise, daß jede so entstehende Zahl w eine rationale Zahl sein muß.

381033
In einem beliebigen Dreieck seien h_a, h_b und h_c die Höhen und ρ der Inkreisradius.
Man beweise, daß stets $h_a + h_b + h_c \geq 9\rho$ gilt.
Gibt es ein Dreieck, für welches $h_a + h_b + h_c = 9\rho$ gilt?