Aufgabenausschuß des Mathematik-Olympiaden e.V.

38. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Länderrunde)
Klasse 10
Aufgaben
2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

381034

Man ermittle alle diejenigen Paare (x,y) natürlicher Zahlen x, y mit $x+y=627$, zu denen zwei Primzahlen p und q so existieren, daß $x\cdot q=y\cdot p$ gilt.

381035

Jörn behauptet als Scherzaufgabe, die Zahl $z=49858$ sei gleich der Zahl $2\cdot z$ (obwohl diese Zahl z ja offensichtlich verschieden von der einzigen Lösung $z=0$ der Gleichung $z=2\cdot z$ ist). Nora nennt eine Lösungsidee: Man verstehe die eine der Ziffernangaben für z bzw. $2\cdot z$ im Dezimalsystem, die andere im Stellenwertsystem mit einer von 10 verschiedenen Basis B.
Man untersuche, ob diese Idee zur behaupteten Gleichheit führt. Ist das der Fall, so ermittle man alle diejenigen Basen B, für die das zutrifft.

381036

Auf einem Halbkreis über einer gegebenen Strecke AB als Durchmesser seien zwei Punkte C und D gelegen. Ferner sei P ein beliebiger Punkt der Strecke CD, und Q sei der Fußpunkt des von P auf AB gefällten Lotes. Man beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets die Gleichung

$$\overline{AQ}\cdot\overline{QB}-\overline{CP}\cdot\overline{PD}=\overline{PQ}^2$$

gilt.