Aufgabenausschuß des Mathematik-Olympiaden e.V.

38. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Länderrunde)
Klasse 11-13
Aufgaben
1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

381331
Es seien a, b, c, d reelle Zahlen mit den Eigenschaften

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \qquad (1)$$

$$ab + cd = 0. \qquad (2)$$

Man beweise, daß dann stets gilt $a^2 = d^2$ und $b^2 = c^2$.

381332
Im Raum seien n Kugeln mit einem Radius $\rho = 1$ so angeordnet, daß es einen Punkt P gibt, der ein innerer Punkt jeder dieser Kugeln ist. Unter dieser Voraussetzung ist bekannt, daß es eine Kugel mit größtmöglichem Radius r gibt, die in allen n Kugeln enthalten ist, und andererseits eine Kugel mit kleinstmöglichem Radius R existiert, die alle n Kugeln enthält.
Man beweise, daß für die genannten Radien $R + r = 2$ gilt.

Von den nachstehenden Aufgaben 381333A und 381333B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:
381333A
Gegeben sei eine Folge ganzer Zahlen a_1, a_2, a_3,.... Es wird nun eine neue Folge x_0, x_1, x_2,... gebildet, indem man $x_0 = 1$ und $x_1 = a_1$ setzt, und danach x_2, x_3,... schrittweise aus der Gleichung

$$x_{k+1} = a_k \cdot x_k + x_{k-1}, \quad k = 1, 2, 3,...$$

bestimmt. Entsprechend bildet man die Folge y_0, y_1, y_2,... , indem man $y_0 = 1$, $y_1 = a_1 + 1$ setzt und anschließend y_2, y_3,... schrittweise gemäß

$$y_{k+1} = a_k \cdot y_k + y_{k-1}, \quad k = 1, 2, 3,...$$

berechnet.
Beweisen Sie, daß für jede positive ganze Zahl k die beiden Zahlen x_k und y_k zueinander teilerfremd sind.

331333B
Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl n, für die gilt

$$f(n) = \frac{(4\cdot 1^4+1)(4\cdot 3^4+1)(4\cdot 5^4+1)\ldots(4\cdot(2n-1)^4+1)}{(4\cdot 2^4+1)(4\cdot 4^4+1)(4\cdot 6^4+1)\ldots(4\cdot(2n)^4+1)} < \frac{1}{1000}.$$