Aufgabenausschuß des Mathematik-Olympiaden e.V.

38. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 8
Aufgaben
1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

380841

Adams, Berkins, Corner, David und Ericson, fünf üble Glücks- und Falschspieler, hatten dem Greenhorn Melborn insgesamt 75 Dollar im Poker abgenommen. Da die „Gewinne" dieser fünf Genannten sämtlich voneinander verschieden waren, schlug Berkins vor, die gesamte Summe so untereinander zu verteilen, daß jeder gleich viele Dollar erhält. Dabei hätte er selber zwar keinen Dollar dazubekommen, von seiner Beute aber auch nichts abgeben müssen. Nur Adams würde bei dieser Aufteilung einen Teil seines Gewinns verlieren. Dieser stimmte natürlich nicht zu, sondern fluchte kräftig und verschwand mit seinem Geld. Nunmehr schlug Corner vor, die verbleibenden Dollar so unter den restlichen vier Spielern zu verteilen, daß wiederum jeder gleich viele Dollar erhält. Er wußte natürlich, daß er diesmal nichts bekommen, aber auch nichts abzugeben hätte. Doch jetzt weigerte sich Berkins und verdrückte sich mit seinen "Einnahmen". Einen gleichen Vorschlag Davids, der in dieser neuen Situation davon ausgehen konnte, bei einer gleichmäßigen Aufteilung weder zu gewinnen noch zu verlieren, lehnte Corner ab und suchte mit seinem Geld das Weite. David und Ericsen konnten den Rest nicht teilen, weil sich ihre ergaunerten Beträge nur um einen Dollar unterschieden und weder einer der anderen Gäste des Saloons mit ihnen etwas zu tun haben mochte noch Wechselgeld zur Verfügung stand.
Wie viele Dollar hat jeder gewonnen?
Weise nach, daß es nur eine Verteilung gibt

380842

Anke hat für ihre Geburtstagsfeier ein Glücksspiel vorbereitet. Sie stellt für ihre Gäste, Hans und Fritz, sechs verschlossene Töpfe auf den Tisch, in denen sich insgesamt 18 Kugeln befinden. In zwei der 6 Töpfe sind je 2 Kugeln, in weiteren zwei Töpfen je 3 Kugeln und in den letzten beiden je 4 Kugeln.
Diese Zahlen werden bekanntgegeben; allerdings wird nicht gesagt, welches die Töpfe mit 2 bzw. mit 3 bzw. mit 4 Kugeln sind.
Hans soll das Spiel beginnen. Er soll vor Beginn des Spiels ankündigen, welche Töpfe er öffnen wird. Außerdem darf er vor Beginn des Spiels wählen, nach welcher Regel ein Spiel als gewonnen gilt. Dabei hat er die Wahl zwischen folgenden Möglichkeiten:
Als gewonnen für ihn gilt das Spiel, wenn er

(1) 1 Topf öffnet und darin genau 3 Kugeln findet oder
(2) 2 Töpfe öffnet und insgesamt genau 6 Kugeln darin findet oder
(3) 3 Töpfe öffnet und darin insgesamt genau 9 Kugeln findet.

Anschließend spielt Fritz. Er weiß, welche Töpfe Hans geöffnet hat und was darin war. Die restlichen Töpfe stehen ihm zur Verfügung. Auch er darf die Anzahl der von ihm zu öffnenden Töpfe und die Gewinnregel (1) oder (2) oder (3) wählen.
(a) Welchen Rat würdest du Hans geben? Soll er sich für (1) oder für (2) oder für (3) entscheiden?
(b) Fritz mault: „Das Spiel ist ungerecht. Wenn Hans eine für ihn möglichst günstige Regel wählt, so habe ich — gleichgültig, ob er dabei dann gewonnen oder verloren hat — eine schlechtere Gewinnchance als die, die er hatte!"
Ist dieses Maulen berechtigt?
Hinweis: Zur Beantwortung der Frage kann vorausgesetzt werden, daß Hans tatsächlich die für ihn günstigste Regel benutzt hat.

380843

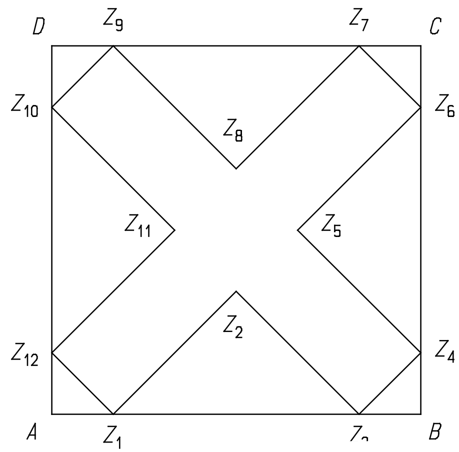

Abb. A380843

Die Abbildung A380843 zeigt ein Quadrat $ABCD$ mit gegebener Kantenlänge a und ein Zwölfeck $Z_1 Z_2 \cdots Z_{11} Z_{12}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die Eckpunkte Z_1, Z_3 des Zwölfecks liegen auf der Quadratseite AB, die Eckpunkte Z_4, Z_6 liegen auf BC, die Eckpunkte Z_7, Z_9 liegen auf CD, und Z_{10}, Z_{12} liegen auf DA.

(2) Die Eckpunkte Z_2, Z_5, Z_8, Z_{11} liegen im Innern des Quadrates, und zwar so, daß sie jeweils zusammen mit zwei anderen Ecken des Zwölfecks, wie in der Abbildung ersichtlich, die Ecken eines gleichschenlig-rechtwinkligen Dreiecks sind.

(3) Die Strecken Z_1Z_3, Z_4Z_6, Z_7Z_9, $Z_{10}Z_{12}$ haben alle dieselbe Länge; diese sei x genannt.

(4) Die Strecken AZ_1, Z_3B, BZ_4, Z_6C, CZ_7, Z_9D, DZ_{10}, $Z_{12}A$ haben alle dieselbe Länge; diese sei y genannt.

(a) Zusätzlich zu diesen Voraussetzungen sei $x = 2y$ vorausgesetzt. Berechne dann in Abhängigkeit von a den Flächeninhalt des Zwölfecks!

(b) Anders als in (a) sei jetzt zusätzlich zu (1) bis (4) vorausgesetzt, daß der Flächeninhalt des Zwölfecks halb so groß wie der Flächeninhalt des Quadrates ist. Berechne dann in Abhängigkeit von a die Längen x und y !

(c) Nochmals anders als bisher werde jetzt zusätzlich zu (1) bis (4) gefordert, daß die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke $Z_1 Z_2 Z_3$, $Z_4 Z_5 Z_6$, $Z_7 Z_8 Z_9$, $Z_{10} Z_{11} Z_{12}$ halb so groß wie der Flächeninhalt des Quadrates ist.
Leite aus diesen Forderungen ((1) bis (4) und (c)) eine Konstruktionsbeschreibung für ein Zwölfeck *her*! (Das heißt: Zu beweisen ist die folgende Aussage: *Wenn* ein Zwölfeck die genannten Forderungen erfüllt, *dann* kann es durch die von dir beschriebene Konstruktion erhalten werden.)
Führe die von dir beschriebene Konstruktion durch!