Aufgabenausschuß des Mathematik-Olympiaden e.V.

38. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 8
Aufgaben
2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

380844

Von dem englischen Physiker, Mathematiker und Astronomen Isaak Newton (1643 - 1727) stammt folgende Aufgabe:
„Ein Amtmann kauft Pferde und Ochsen für insgesamt 1770 Taler. Er zahlt für ein Pferd 31 Taler, für einen Ochsen aber 21 Taler.
Wie viele Pferde und wie viele Ochsen können es hiernach gewesen sein?“
Ermittle alle Antworten auf diese Frage!

380845

Ermittle alle Zahlen n, die folgende Bedingungen (1) bis (4) gleichzeitig erfüllen:

(1) Es gibt zwei zweistellige Primzahlen p_1 und p_2 mit $p_1 < p_2$ und $n = p_1 \cdot p_2$
(2) p_1 ist die Quersumme von n.
(3) Die Einerstellen von p_1 und p_2 sind einander gleich.
(4) $p_1 + 6$ und $p_1 - 6$ sind zweistellige Primzahlen.

380846

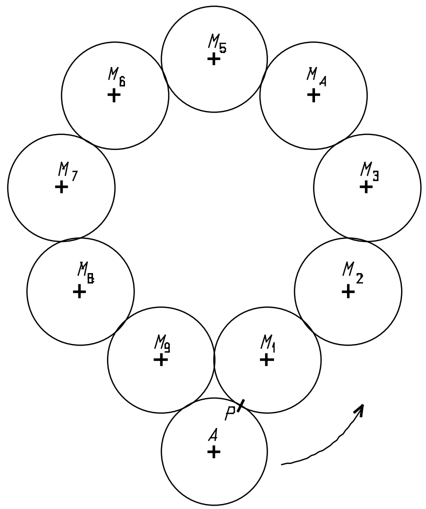

Abb.A380846

Es seien $K_1, \dots, K_9$ neun Kreise, die alle denselben Radius r haben und deren Mittelpunkte $M_1, \dots, M_9$ die Ecken eines regelmäßigen Neunecks der Seitenlänge $2r$ sind. Ein zehnter Kreis K mit demselben Radius r habe seinen Mittelpunkt A außerhalb des Neunecks $M_1 \cdots M_9$, und zwar so, daß der Kreis K die Kreise K_1 und K_9 berührt; der Berührungspunkt von K mit K_1 sei P (siehe Abb.A380846). Der Kreis K soll an den festgehaltenen Kreisen $K_1, \dots, K_9$ (in dieser Reihenfolge) abrollen, ohne dabei an ihnen zu gleiten.

Wir sagen, der Kreis K habe „einen *Umlauf* um $K_1, \dots, K_9$“ ausgeführt, wenn der Mittelpunkt A zum ersten Mal wieder dieselbe Lage wie zu Anfang hat.
Wir sagen, K habe „eine *Umdrehung*“ ausgeführt, wenn der Pfeil $\overrightarrow{AP}$ zum ersten Mal wieder dieselbe Richtung wie zu Anfang hat.

(a) Wie viele Umdrehungen führt K bei einem Umlauf um $K_1, \dots, K_9$ aus?

(b) Es sei n eine natürliche Zahl größer als 2. Das Neuneck in der vorigen Aufgabe werde durch ein regelmäßiges n-Eck $M_1 \cdots M_n$ der Seitenlänge $2r$ ersetzt, die 9 Kreise $K_1, \dots, K_9$ durch n Kreise $K_1, \dots, K_n$, die alle den Radius r haben; jeweils K_i habe den Mittelpunkt M_i. Ein $(n+1)$-ter Kreis K mit dem Radius r habe wieder seinen Mittelpunkt A außerhalb des n-Ecks $M_1 \cdots M_n$, und zwar so, daß der Kreis K die Kreise K_1 und K_n berührt; der Berührungspunkt von K mit K_1 sei P. Die Erklärungen für „Umlauf“ und „Umdrehung“ werden (mit $K_1, \dots, K_n$ statt $K_1, \dots, K_9$) übernommen.

Beantworte in Abhängigkeit von n die entsprechende Frage wie in (a)!
(Bemerkung: Die hier gesuchte Zahl der Umdrehungen muß nicht für jedes n eine ganze Zahl sein.)

(c) Beantworte in Abhängigkeit von n die folgende Frage:
Nach wie vielen Umläufen um $K_1, \dots, K_n$ hat der Punkt P zum ersten Mal wieder dieselbe Lage wie zu Anfang?