Aufgabenausschuß des Mathematik-Olympiaden e.V.

38. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 11-13
Aufgaben
1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

381341

Man finde

a) alle natürlichen Zahlen x, y,
b) alle ganzen Zahlen x, y,

die die Gleichung

$$x^2 + xy + y^2 = 97$$

erfüllen.

381342

Man ermittle alle reellen Zahlen x, für die gilt

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \le \sqrt{1+x} \le 1 + \frac{x}{2}\,. \tag{1}$$

381343

Mathematiker früherer Zeiten, die nach Möglichkeiten zur Berechnung der Flächeninhalte konvexer ebener Vierecke suchten, gelangten unter anderem zu folgenden Formeln für den Flächeninhalt A eines konvexen ebenen Vierecks mit den aufeinanderfolgenden Seiten a, b, c, d:

$$A = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}, \tag{1}$$

$$A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \text{ mit } p = \frac{1}{2}(a+b+c+d). \tag{2}$$

Tatsächlich aber gelten diese Formeln nicht für alle konvexen ebenen Vierecke.
Beweisen Sie, daß (1) genau für alle Rechtecke und (2) genau für alle Sehnenvierecke richtig ist.