Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

39. Mathematik-Olympiade
1 Stufe (Schulrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

390811

Peter und Hans fuhren mit Fahrrädern einen Weg von A nach B, jeder mit gleichbleibender Geschwindigkeit. In A fuhr Peter 24 Minuten später ab als Hans. Während dieser Zeit legte Hans 6 km zurück. Nachdem Peter eine Stunde gefahren war, holte er Hans ein.

Welche Geschwindigkeit hatte Peter, welche Geschwindigkeit hatte Hans? Wie lang ist der Weg von A bis zum Treffpunkt der beiden?

390812

Die Abbildungen A390812a und b zeigen ein Brett, auf dem 16 Nägel in einer quadratischen Anordnung angebracht sind. Der Abstand jedes Nagels zu seinen nächsten Nachbarn beträgt 1 cm. In den folgenden Aufgaben sind diese Nägel als Punkte anzusehen; der Durchmesser der Nägel ist zu vernachlässigen.

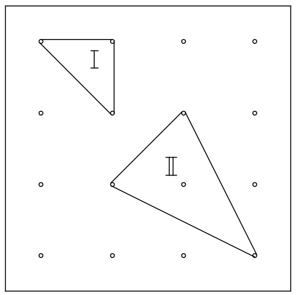

Abb.A390812a

(a) Man kann um drei Nägel einen Faden so spannen, dass ein Dreieck entsteht.
Wie viele Dreiecke, die kongruent zum Dreieck I sind, lassen sich so auf dem Nagelbrett bilden? Wie viele Dreiecke, die kongruent zum Dreieck II sind, lassen sich so auf dem Nagelbrett bilden?

(b) Man kann einen Faden so um gewisse Nägel herum spannen, dass er dabei 4 Nägel berührt, die die Ecken eines Quadrates bilden. (Ein Beispiel ist das Quadrat III mit dem Flächeninhalt 1 cm^2.)
Nenne alle Flächeninhalte von Quadraten, die sich auf dem Nagelbrett nach dieser Beschreibung bilden lassen!

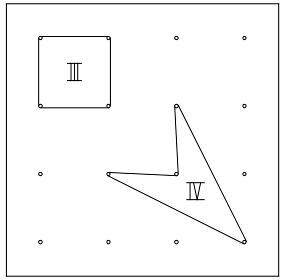

Abb.A390812b

(c) Man kann einen Faden so spannen, dass das Viereck IV entsteht.
Ermittle den Flächeninhalt dieses Vierecks!

(d) Finde 5 Figuren, die folgende Bedingungen erfüllen !
(1) Jede der Figuren entsteht, indem man einen Faden um gewisse Nägel herum spannt.
(2) Der Flächeninhalt jeder der Figuren beträgt $2\frac{1}{2}$ cm^2.
(3) Im Innern jeder der Figuren (also nicht von dem Faden berührt) befindet sich genau ein Nagel.
(4) Je zwei der 5 Figuren sind nicht zueinander kongruent.
Eine Begründung, dass die Bedingungen (1) bis (4) erfüllt sind, wird nicht verlangt.

390813

Rita und Gert unterhalten sich über Ungleichungen in der Geometrie.

(a) Rita sagt: „Wenn ich als anschaulich klar das Hilfsmittel benutzen darf, dass ein Kreisbogen stets länger ist als die zugehörige Sehne, dann kann ich zeigen, dass für jeden Kreis die Ungleichung $U > 6\cdot r$ zwischen Umfang U und Radius r gilt.“

(b) Gert meint: „Mit diesem Hilfsmittel kann man auch zeigen: Für jedes Dreieck gilt die Ungleichung $U > u$ zwischen dem Umfang U des Umkreises des Dreiecks und dem Umfang u des Dreiecks selbst.“

(c) Rita erwidert: „Jetzt vermute ich, dass $6\cdot r$ nur um so wenig kleiner ist als U, dass sogar für jedes Dreieck die genauere Ungleichung $6\cdot r > u$ gilt, worin r den Radius des Umkreises des Dreiecks bezeichnet. Wie kann man diese Ungleichung wohl beweisen?“ Gert antwortet: „Man kann sie daraus erhalten, dass die folgende allgemeinere Aussage gilt: Wenn ABC ein beliebiges Dreieck und P ein beliebiger Punkt ist, dann besteht die Ungleichung $2\cdot(|PA|+|PB|+|PC|)>u$.“

Wie kann man die in (a) und (b) behaupteten Beweise führen ?
Wie kann man Gerts Aussage in (c) beweisen ?
Wie kann man daraus erhalten, dass Ritas Vermutung in (c) zutrifft ?

<u>390814</u>

Sarah hat zwei gleich große Eimer A und B, die beide zur Hälfte mit Wasser gefüllt sind.

Sie führt nun einen *Umfüllvorgang* durch, der aus zwei Teilschritten besteht.

Erster Teilschritt: Die Hälfte der im Eimer A befindlichen Wassermenge wird in den Eimer B geschüttet.

Zweiter Teilschritt: Die Hälfte der nun im Eimer B befindlichen Wassermenge wird in den Eimer A geschüttet.

(a) Wie viel Wasser ist nach jedem Teilschritt in A, wie viel in B?
Gib auch jeweils das Verhältnis dieser beiden Wassermengen an, ausgedrückt als Verhältnis zweier zueinander teilerfremder natürlicher Zahlen!

(b) Sarah führt den Umfüllvorgang (jeweils bestehend aus den zwei Teilschritten) noch ein zweites, ein drittes und ein viertes Mal durch.
Beantworte jedesmal dieselben Fragen wie in (a)!

(c) Welche Gesetzmäßigkeiten kannst du dabei entdecken ? (Ein Beweis ist hier nicht gefordert.)
Verwende eine (oder mehrere) davon, um Antwort auf folgende Fragen (1), (2) und (3) zu finden:

- Welches Verhältnis bilden die Wassermengen, nachdem der Umfüllvorgang insgesamt 8-mal durchgeführt wurde?
- Welches Verhältnis bilden die Wassermengen nach insgesamt n-maliger Durchführung des Umfüllvorgangs (n ist eine beliebige natürliche Zahl)?
- Wie kann man zeigen, dass auch bei beliebig häufiger Wiederholung des Umfüllvorgangs jeder der beiden Eimer stets mindestens zu einem Viertel gefüllt ist?

(d) Schreibe, wenn du dazu in der Lage bist und Spaß daran hast, ein Computerprogramm, mit dem sich Antworten auf hier gestellte Fragen finden lassen!