Aufgabenausschuß des Mathematik-Olympiaden e.V.

39. Mathematik-Olympiade
2 Stufe (Schulrunde)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

391021

Wie viele vierstellige natürliche Zahlen gibt es, die durch 11 teilbar sind und deren Quersumme ebenfalls durch 11 teilbar ist?

Hinweis: Hat eine vierstellige Zahl z (in üblicher Darstellung im Dezimalsystem) die Ziffern a , b , c , d , so heißt die Zahl $a+b+c+d$ die *Quersumme* von z .

391022

Ermitteln Sie alle diejenigen Paare (x,y) reeller Zahlen x , y , für die die folgende Gleichung (1) gilt !

$$2^{\sqrt{x^2-1}} + 3^{\sqrt{y^2-4}} = 2\ . \tag{1}$$

391023

Gegeben seien ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a und ein beweglicher Punkt X auf der Diagonalen $\overline{DB}$. Der Fußpunkt des Lotes von X auf AB sei E , der Fußpunkt des Lotes von X auf DA sei F.

Man beweise:

(a) Die Summe der Längen der Strecken $\overline{XE}$ und $\overline{XF}$ ist gleich a.

(b) Die Strecken $\overline{CF}$ und $\overline{DE}$ sind einander gleichlang und aufeinander senkrecht.

(c) Die Strecken $\overline{CX}$ und $\overline{EF}$ sind einander gleichlang und aufeinander senkrecht.

(d) Die Gerade CX geht durch den Schnittpunkt der Strecken $\overline{BF}$ und $\overline{DE}$.

391024

Uber ein Dreieck ABC sowie drei Punkte, D auf $\overline{BC}$, E auf $\overline{CA}$ und F auf $\overline{AB}$, werde vorausgesetzt:

(1) Das Dreieck ABC ist gleichschenklig.

(2) Die drei Strecken $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ haben einen Punkt S gemeinsam.

(3) Im Dreieck ABC ist $\overline{AD}$ die auf $\overline{BC}$ senkrechte Höhe,
$\overline{BE}$ die Seitenhalbierende von $\overline{AC}$,
$\overline{CF}$ die Winkelhalbierende von $\angle ACB$.

Zu beweisen ist: Aus diesen Voraussetzungen (1), (2), (3) folgt: Das Dreieck ABC ist gleichseitig.