

**39. Mathematik-Olympiade, 2. Stufe**  
**Aufgaben**  
**Klassen 11 - 13**

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionsaufgaben) Hilfslinien soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

391321

Es seien  $x$  und  $y$  positive ganze Zahlen, für die

$$\frac{y}{3}(x^3 - 198) = 1999$$

gilt. Welche Werte kann das Produkt  $x \cdot y$  annehmen?

391322

Drei Maschinen bedrucken Kärtchen mit Paaren ganzer Zahlen. Zu Beginn ist nur ein Kärtchen mit dem Paar  $(0; 1)$  vorhanden. Wird in eine Maschine ein Kärtchen eingelegt, erhält man ein Kärtchen mit einem neuen Zahlenpaar. Steht an dem eingegebenen Kärtchen das Paar  $(m; n)$ , so gibt die Maschine  $A$  ein Kärtchen mit dem Paar  $(n; m)$ , die Maschine  $B$  ein Kärtchen mit dem Paar  $(m + n; n)$  und die Maschine  $C$  ein Kärtchen mit dem Paar  $(m - n; n)$  aus.

- a) Untersuchen Sie, ob man durch mehrfache Verwendung der drei Maschinen Kärtchen mit dem Paar  $(19; 99)$  drucken kann.
- b) Lassen sich Kärtchen mit dem Paar  $(39; 13)$  drucken?
- c) Bestimmen Sie alle Zahlenpaare, die gedruckt werden können.

381323

Eine Zahlenfolge  $(x_n)$  sei durch das rekursive Bildungsgesetz

$$x_{n+1} = \left(\frac{n}{3} + \frac{1}{n}\right) \cdot x_n^2 - \frac{n^3}{3} + 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

und ihr Anfangsglied  $x_1 = 1$  gegeben. Bestimmen Sie  $x_{1999}$ .

381324

Es seien  $a$  und  $s$  zwei Längen. Untersuchen Sie, welche Werte das Verhältnis  $\frac{s}{a}$  annehmen

kann, damit eine dreiseitige Pyramide mit folgenden Eigenschaften existiert:

- (I) Die Grundfläche ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Kantenlänge  $a$ .
- (II) Die Seitenflächen sind gleichschenklige Dreiecke mit den Schenkellängen  $s$ .
- (III) Die Höhe  $h$  der Pyramide ist das arithmetische Mittel aus  $a$  und  $s$ , d.h.

$$h = \frac{a + s}{2}.$$