39. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 8
Aufgaben
2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

390844

Ina und ihr Mann hatten zwei Ehepaare zu einer Party eingeladen. Die anwesenden Personen machten folgende (wahre) Aussagen:

(1) Arne: Jeder der drei Männer ist 5 Jahre älter als seine Frau.

(2) Heike: Ich bin die älteste unter den drei Frauen.

(3) Bodo: Julia und ich sind zusammen 52 Jahre alt.

(4) Christian: Addiert man das Alter der sechs Anwesenden, so beträgt die Summe 151.

(5) Julia: Christian und ich sind zusammen 48 Jahre alt.

(6) Ina: Ist es nicht ein großer Zufall, dass wir alle im vorigen Monat Geburtstag hatten ?

Zeige, dass die Aussagen (1) bis (6) ausreichen, um sowohl das Lebensalter (in ganzen Jahren) der sechs genannten Personen zu ermitteln als auch anzugeben, wer mit wem verheiratet ist !

390845

Ein Bauer hinterlässt seinen beiden Söhnen eine Schafherde. Die Brüder lassen diese Herde von einem Mittelsmann verkaufen, wobei sie ihm auftragen, er solle ein jedes der Schafe für so viel Mark verkaufen, wie die Herde Schafe hat.

Der Mittelsmann bringt den Erlös in lauter 10-Mark-Scheinen und einem Rest an Kleingeld, das keinen vollen 10-Mark-Schein mehr ergibt. Die Brüder teilen das Geld so, dass beide gleich viele 10-Mark-Scheine erhalten. Dabei bleiben ein 10-Mark-Schein und der Kleingeldrest übrig. Da sagt der ältere zum jüngeren Bruder: „ Ich nehme den Schein, und du bekommst den Rest und ein von mir soeben gekauftes Taschenmesser, dann haben wir beide gleich viel bekommen.“Wie teuer war das Taschenmesser ?

390846

Für Punkte A, B, C, D in einer Ebene seien folgende Voraussetzungen (1), (2) und (3) erfüllt:

(1) Die Strecke $\overline{AB}$ hat die Länge $a = 6$.

(2) Die Strecke $\overline{DA}$ hat die Länge $d = 2$.

(3) Für die Längen e bzw. f der Strecken $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BD}$ gilt $e + f = 11$.

(Alle Längenangaben seien in cm verstanden.)
Hinweis: In dieser Aufgabe sollen auch Fälle zugelassen werden, in denen drei oder mehr der Punkte A, B, C, D auf einer Geraden liegen, insbesondere auch solche Fälle, in denen zwei oder mehr dieser Punkte miteinander zusammenfallen.

(a) Finde im Fall, dass A, B, C, D auf einer Geraden liegen, alle Möglichkeiten der Anordnung dieser Punkte, so dass (1), (2) und (3) erfüllt sind !
Welchen Wert hat für jede dieser Anordnung die Summe $u = a + b + c + d$ der Längen der Strecken $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$?
Welches ist hiernach der größte Wert g und welches der kleinste Wert k, den u für Punkte A, B, C, D annehmen kann, die auf einer Geraden liegen und (1), (2) und (3) erfüllen ?

(b) Beweise den folgenden Satz:
Für vier Punkte A, B, C, D, die in einer Ebene liegen und die Voraussetzungen (1), (2), (3) erfüllen ist der größte Wert, den die Summe u annehmen kann, derselbe wie der in (a) gefundene Wert g.

(c) Zeige an einem Beispiel, dass es Punkte A, B, C, D, gibt die in einer Ebene liegen, (1), (2), (3) erfüllen und für die die Summe u einen Wert kleiner als der in (a) gefundene Wert k hat !