Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.

39. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 9
Aufgaben
2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

390944
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC sei P der Berührungspunkt des Inkreises mit der Hypotenuse AB. Die Längen der Strecken $\overline{AP}$ und $\overline{BP}$ seien d und e. Beweisen Sie, dass dann für den Flächeninhalt F des Dreiecks

(1) $F = d \cdot e$

gilt.

390945
$P(x)$ sei ein Polynom dritten Grades, d.h.
$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit ganzen Zahlen a, b, c, d.
p und q seien zwei Primzahlen, zwischen denen keine weitere Primzahl liegt, und es sei bekannt, dass $P(p) = 1234$ und $P(q) = 4321$ gilt.
Stellen Sie fest, ob sich aus diesen Angaben p und q eindeutig bestimmen lassen und ermitteln Sie gegebenenfalls p und q.

390946
Aus insgesamt 220 kongruenten Kugeln soll durch Aufeinanderschichten ein räumliches Gebilde, welches wir Kugelpyramide nennen, wie folgt aufgebaut werden:
Basis des Aufbaus ist ein Brett mit 55 Vertiefungen, jede Vertiefung kann eine Kugel aufnehmen. Die Vertiefungen sind so angebracht, dass die Mittelpunkte der außen liegenden Kugeln auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks liegen und benachbarte Kugeln sich gegenseitig berühren.
In jede Vertiefung wird eine Kugel gelegt. Auf diese erste Schicht wird eine zweite Kugelschicht so gelegt, dass jede Kugel dieser Schicht auch drei Kugeln der darunterliegenden Schicht berührt. Diese Art der Schichtung wird so lange fortgesetzt, bis nur noch eine Kugel auf die darunterliegenden 3 Kugeln gelegt werden kann.

a) Beweisen Sie, dass für diesen so beschriebenen Aufbau genau 220 Kugeln benötigt werden.

b) Untersuchen Sie, ob sich die Menge der 220 Kugeln in Teilmengen aus je mindestens 4 Kugeln so zerlegen lässt, dass man aus jeder dieser Teilmengen

eine kleinere Kugelpyramide aufbauen kann (jedesmal wieder auf dem Brett beginnend).

c) Ist eine wie in b) geforderte Zerlegung in sieben kleinere Pyramiden möglich, so geben Sie alle diese Zerlegungen an.