Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

39. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 12 - 13
Aufgaben
2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

391334

Man ermittle alle nichtnegativen ganzen Zahlen x, y, z, die das Gleichungssystem

$$\sqrt{x+y}+\sqrt{z}=7 \qquad (1)$$
$$\sqrt{x+z}+\sqrt{y}=7 \qquad (2)$$
$$\sqrt{y+z}+\sqrt{x}=5 \qquad (3)$$

erfüllen.

391335

a) Auf einer Kreislinie liegen $2n$ paarweise verschiedene Punkte, von denen n rot und n blau gefärbt sind. Man beweise, dass man diese durch n Sehnen paarweise so verbinden kann, dass sich keine Sehnen schneiden und die Endpunkte jeder Sehne unterschiedliche Farbe haben.

b) Man beweise, dass die Aussage von Teil a) gültig bleibt, wenn die Punkte beliebige Lage in einer Ebene haben, vorausgesetzt, es liegen keine drei auf einer gemeinsamen Geraden.

391346

Eine Folge $(a_n)_{n=2,3,\ldots}$ positiver ganzer Zahlen erfülle die folgenden drei Bedingungen:

(1) Für jede natürliche Zahl $m \geq 1$ gilt $a_{2^m} = \frac{1}{m}$.

(2) Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt $a_{2n-1}a_{2n} = a_n$.

(3) Für alle natürlichen Zahlen m, n mit $2^m > n \geq 1$ gilt $a_{2n}a_{2n+1} = a_{2^m+n}$.

Bestimmen Sie a_{2000}.
Es darf ohne Beweis vorausgesetzt werden, dass durch (1), (2), (3) genau eine Folge $(a_n)_{n=2,3,\ldots}$ positiver reeller Zahlen bestimmt ist.