Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

40. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 9 und 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

401011

Beim Verteilen eines Kuchens an zwei Personen A, B kann man nach dem Prinzip „Der eine teilt, der andere wählt“ vorgehen. Es besagt: A zerlegt den Kuchen so in zwei Teile, wie er es für befriedigend hält, und danach wählt B einen dieser Teile, so wie er diese Auswahl für befriedigend hält.

a) Nennen Sie eine Überlegung, warum bei jedem Vorgehen, das dieser Vorschrift folgt, die insgesamt entstandene Verteilung sogar für beide Personen als befriedigend angesehen werden kann!

b) Formulieren Sie eine entsprechende Vorschrift, um einen Kuchen an drei Personen zu verteilen, und nennen Sie eine Überlegung, warum hiernach das Ergebnis für jede der drei Personen als befriedigend angesehen werden kann!

401012

Eine Tafel Schokolade bildet ein Rechteck von 4×7 Stücken. Will man sie völlig in die 28 Einzelstücke zerbrechen, so kann man verschieden vorgehen. Zum Beispiel kann man zunächst durch sechs Brechungen 7 Schokoladenstreifen aus je 4 Stücken erzeugen. Um die Einzelstücke zu erhalten, muss man dann jeden dieser Streifen dreimal brechen. Insgesamt benötigt man also $6+3\cdot 7 = 27$ Brechungen. Ist es möglich (ohne Schokoladenteile übereinander zu legen) durch geschickteres Brechen, mit weniger als 27 Brechungen auszukommen?

401013

Andi und Bernd unterhalten sich über Besonderheiten der Jahreszahl 2001. Andi behauptet, dass die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis 2001 durch 2001 teilbar ist. Nach einigem Nachdenken meint Bernd, dass dieses nicht ungewöhnlich ist. Es gebe sogar unendlich viele Zahlen n mit der Eigenschaft, dass die Summe von n aufeinander folgenden ganzen Zahlen durch n teilbar ist.
Beweisen Sie, dass die Behauptungen von Andi und Bernd richtig sind.

401014

Man denke sich alle Brüche mit dem Zähler 1, also Stammbrüche, und den Nennern $2^{10}, 2^{10}+1, 2^{10}+2$ bis zu dem Bruch (einschließlich) mit dem Nenner 2^{20} aufgeschrieben.

a) Wie viele Stammbrüche sind das?

b) Beweisen Sie, dass die Summe dieser Stammbrüche größer als 5 ist!

<u>401015</u>

a) Gegeben ist ein regelmäßiges Fünfeck $ABCDE$ mit der Seitenlänge a. Auf der Seite AB sei ein Quadrat $BAFG$ nach außen errichtet. Das Quadrat "rollt" im positiven Drehsinn um das Fünfeck derart, dass bei der ersten Bewegung das Quadrat eine Drehung um den Punkt B ausführt, bis Punkt G auf dem Punkt C liegt. Danach folgt eine gleichartige Drehung um C usw. Die Drehung wird so lange fortgesetzt, bis schließlich Punkt G auf die Position gelangt ist, in der Punkt F in der Ausgangslage war. Wie lang ist der Weg, den Punkt G bei diesem "Rollen" zurückgelegt hat.

b) Gegeben ist ein regelmäßiges Sechseck $ABCDEF$, auf dessen Seite AB sei ein Quadrat $BAGH$ nach außen errichtet. Dieses Quadrat rolle in der unter a) beschriebenen Weise um das Sechseck. Ist es möglich, dass der Punkt H in die Position gelangt, in der sich Punkt G in der Ausgangslage befand?

<u>401016</u>

Gegeben sei ein Quadrat mit der Seitenlänge 4 cm.
Beweisen Sie, dass jedes Dreieck, dessen Ecken auf dem Rand dieses Quadrates liegen, einen Flächeninhalt hat, der höchstens $8\,\text{cm}^2$ beträgt.