Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

40. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 11 - 13
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

401321
Man bestimme alle Paare $(x;y)$ reeller Zahlen, die Lösungen des Gleichungssystems

$$y-8=\sqrt{\frac{x+y+8}{2}} \tag{1}$$

$$y+5=\sqrt{x+\frac{y}{2}+5} \tag{2}$$

sind.

401322
Man ermittle alle nichtnegativen ganzen Zahlen n, für die 9^n+1 durch 365 teilbar ist.

401323
Gegeben ist ein Würfel mit der Kantenlänge a, dem eine Kugel mit Radius $\frac{a}{2}$ einbeschrieben ist. In die Würfelecken sollen kleinere Kugeln eingefügt werden, die jeweils die drei Flächen, die in der Ecke zusammenstoßen, und die große Kugel berühren. Wie groß ist der Radius der kleinen Kugeln?

401324
Der ganzzahlige Anteil einer reellen Zahl x ist diejenige ganze Zahl y, für die $y \le x < y+1$ gilt. Der ganzzahlige Anteil von x wird mit $\lfloor x \rfloor$ bezeichnet. Man beweise: Für jede nichtnegative ganze Zahl n gilt

$$\left\lfloor \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 \right\rfloor = 4n+1.$$