Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

40. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Länderrunde)
Klasse 11-13
Aufgaben
1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

401331

Die Stadtverwaltung von Parakugel möchte einen neuen Brunnen bauen. Das Wasser strömt an einer Stelle A, die 4 Meter über dem Boden liegt, in waagerechter Richtung aus. Danach nimmt der Wasserstrahl die Form einer nach unten geöffneten Parabel an und trifft an einer Stelle S auf dem Boden auf, die 1 Meter von dem unterhalb A gelegenen Punkt P des Bodens entfernt ist. Der Brunnen soll mit einer Kugel geschmückt werden, die an der Stelle P auf dem Boden aufliegt.
Welche Größe darf der Kugelradius haben, damit der Wasserstrahl nicht auf die Kugel trifft? Die Dicke des Wasserstrahls soll dabei vernachlässigt werden.

401332

Es sei a eine reelle Zahl. Man beweise, dass für die Lösungen x_1 und x_2 der quadratischen Gleichung

$$x^2 + 4a\,x + a^2 = 1$$

die Ungleichung $x_1^4 + x_2^4 \geq 2$ gilt.

401333

Eine ganze Zahl z wird "kuhl" genannt, wenn sie in Form einer endlichen Summe verschiedener Potenzen mit der Basis -2 und nichtnegativen ganzzahligen Exponenten darstellbar ist, wobei keine zwei der auftretenden Exponenten einander gleich sind. Beispielsweise sind die Zahlen $z = 3$ und $z = 5$ kuhl, denn es gilt

$$3 = (-2)^2 + (-2)^1 + (-2)^0, \qquad 5 = (-2)^2 + (-2)^0.$$

Man beweise, dass jede von Null verschiedene ganze Zahl kuhl ist.