Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

40. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Länderrunde)
Klasse 11-13
Aufgaben
2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

401334

Es sei (a_n) eine Zahlenfolge, für die die Differenz d aufeinanderfolgender Glieder konstant ist. Ferner seien die Folgen (s_n) und (S_n) durch

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \qquad S_n = s_1 + s_2 + \ldots + s_n$$

definiert.

a) Man berechne das Anfangsglied a_1 und die Differenz d, wenn bekannt ist, dass $s_4 = 4$ und $S_4 = 15$ gilt.

b) Man beweise, dass für alle positiven ganzen Zahlen n die Gleichung

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \left(a_1 + \frac{n-1}{3} \cdot d\right)$$

gilt.

401335

Einem Zylinder ist ein gerader Kreiskegel so einbeschrieben, dass Zylinder und Kegel eine gemeinsame Grundfläche haben und die Spitze des Kegels der Mittelpunkt der Deckfläche des Zylinders ist. Weiterhin sei bekannt, dass von sechs gleichgroßen Kugeln jede den Kegel von außen, die Mantelfläche und die Deckfläche des Zylinders und genau zwei der anderen sechs Kugeln berührt (siehe Abbildung 1).

Man ermittle den Radius der Inkugel des Kegels in Abhängigkeit vom Radius R des Zylinders.

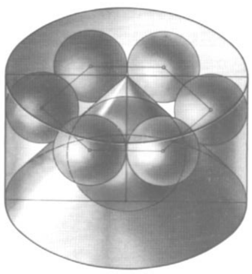

Abb. 1

401336

Man bestimme alle Tripel $(x; y; z)$ ganzer Zahlen, die das Gleichungssystem

$$x + y^2 + z^2 = yz \quad (1)$$
$$x^2 + y^3 + z^3 = 0 \quad (2)$$

erfüllen.