

40. Mathematik-Olympiade

4. Stufe (Bundesrunde)

Klasse 8

Aufgaben

1. Tag



Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

400841

Beim Großen Preis von Schönheide wurde unter den Springreitern ein Stechen erforderlich, an dem nur noch Alex, Boris, Chris und Danny teilnahmen. Bei einem solchen Stechen erreicht jeder der vier Reiter genau eine Platznummer (Erster, Zweiter, Dritter, Vierter). Einige Fans machten Vorhersagen, etwas nebulös, wie sie es gewohnt waren. Sie sagten:

- (1) Jede der vier Platznummern wird genau einmal erreicht.
- (2) Wenn Alex nicht Erster wird, dann wird Chris Vierter.
- (3) Und wenn Chris Dritter wird, dann wird Alex sogar Letzter.
- (4) Nun, jedenfalls wird Alex, verglichen mit Danny, einen besseren Platz erreichen.
- (5) Immerhin: Wenn Boris nicht Erster wird, dann wird Alex Dritter.
- (6) Wenn Chris Zweiter wird, dann wird Danny gewiss nicht Vierter.
- (7) Wenn Chris sogar Erster wird, dann wird Danny Zweiter.
- (8) Wenn aber Danny nicht Zweiter wird, dann wird auch Boris nicht Zweiter.

Ein weiterer Fan, der das hörte, meinte: Wenn alle diese Vorhersagen wahr sind, dann gibt es ja höchstens eine Möglichkeit, wie sich die Plätze verteilen!

Zeige, dass er Recht hat! Wie lautet diese Platzverteilung?

Weise auch nach, dass in der Tat bei dieser Platzverteilung alle Vorhersagen (1) bis (8) wahr sind!

Hinweis: Eine „Wenn – dann“-Aussage, in der die mit „Wenn“ eingeleitete – und ohne dieses „Wenn“ betrachtete – Aussage falsch ist, ist wahr.

400842

Es sei ABC ein Dreieck; die Längen der Seiten \overline{BC} , \overline{AC} , \overline{AB} seien wie üblich mit a , b , c und die Größe des Winkels BAC mit α bezeichnet. Ferner sei r die Radiuslänge des Inkreises und F der Berührungspunkt des Inkreises mit \overline{AB} .

Es ist zu beweisen, dass für alle Dreiecke ABC , die den gleichen Winkel BAC und den gleichen Inkreisradius besitzen, die Summe $(b + c - a)$ konstant ist und dass $\frac{b+c-a}{2}$ die Länge der Strecke \overline{AF} ist!

400843

Fritz hat für seine Geburtstagsgäste ein Spiel mit zwei Töpfen vorbereitet, deren Inhalt nicht eingesehen werden kann. In einem Topf T_1 sind genau drei rote Kugeln, in einem Topf T_2 genau drei blaue.

Manfred greift in beide Töpfe und holt je eine Kugel heraus. Er legt die Kugel aus T_1 in T_2 und die Kugel aus T_2 in T_1 .

Jetzt ist Klaus an der Reihe. Jedem Topf entnimmt auch er eine Kugel, vertauscht sie wie vorher Manfred und legt sie zurück in die Töpfe.

Schließlich führt Manfred den Vorgang ein drittes Mal aus.

Jetzt werden beide Töpfe ausgeschüttet, um festzustellen, welche Kugeln sich nunmehr in den Töpfen befinden.

Sind 3 rote Kugeln in T_1 , gewinnt Manfred das Spiel. Sind 3 blaue Kugeln in T_1 , gewinnt Klaus. Sonst gewinnt niemand.

- a) Untersuche, wer von den beiden die größeren Gewinnchancen hat!
- b) Berechne die Gewinnchancen für beide!