

40. Mathematik-Olympiade

4. Stufe (Bundesrunde)

Klasse 8

Aufgaben

2. Tag



Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

400844

Peter würfelt viermal hintereinander mit einem Spielwürfel. Die dabei erzielten Augenzahlen sind 5, 2, 4, 3. Er notiert sie in dieser Reihenfolge und erhält so die Zahl 5243. Anschließend schreibt er die Augenzahlen der Unterseite der Würfel – also 2, 5, 3, 4 – in derselben Reihenfolge dahinter und erhält auf diese Weise die achtstellige Zahl 52432534. Er teilt diese achtstellige Zahl durch 1111, subtrahiert 7 und teilt das Ergebnis durch 9. Als Ergebnis erhält er die Zahl 5243, die der beschriebenen Anordnung der vier gewürfelten Augenzahlen entspricht.

Erhält Peter bei jeder beliebigen Kombination von vier Augenzahlen wieder die anfangs notierte vierstellige Zahl?

Hinweis: Jeder Spielwürfel ist so beschaffen, dass die Summe der Augenzahlen zweier gegenüberliegender Würfelflächen 7 beträgt.

400845

Es sei  $ABC$  ein Dreieck, in dem die Seite  $\overline{AB}$  länger als die Seite  $\overline{BC}$  ist. Die Größen der Innenwinkel bei  $A$  bzw.  $B$  seien wie üblich mit  $\alpha$  bzw.  $\beta$  bezeichnet. Die Mittelsenkrechte  $m$  der Seite  $\overline{AC}$  schneidet den Umkreis  $k$  des Dreiecks; derjenige Schnittpunkt, der auf derselben Seite der Geraden  $\overline{AC}$  liegt wie der Punkt  $B$ , sei  $D$  genannt.

Es sei ferner  $E$  der Fußpunkt des Lotes von  $D$  auf die Gerade  $AB$ .

- Berechne die Größen der Innenwinkel des Dreiecks  $ABD$  in Abhängigkeit von  $\alpha$  und  $\beta$ !
- Beweise, dass für die Längen  $|AE|, |EB|, |BC|$  der Strecken  $\overline{AE}, \overline{EB}$  bzw.  $\overline{BC}$  die Gleichung  $|AE| = |EB| + |BC|$  gilt!

400846

Uwe ist passionierter Schwimmer. Da er an einem breiten Fluss wohnt, nutzt er diesen zum Training. Dabei geht er folgendermaßen vor: Unter der Oberbrücke begibt er sich mit einem Ball ins Wasser, überlässt den Ball der Strömung und schwimmt selbst gegen den Strom. Nach 20 Minuten wendet er, schwimmt seinem Ball hinterher und holt ihn unter der Unterbrücke ein.

Ermittle die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses, wenn bekannt ist, dass der Abstand zwischen beiden Brücken 2 km beträgt!

Bemerkung: Es wird angenommen, dass der Fluss stets mit gleichbleibender Geschwindigkeit fließt und auch den Ball stets mit dieser Geschwindigkeit mit sich führt. Ferner wird angenommen, dass Uwes Geschwindigkeit (größer als die Geschwindigkeit des Flusses) stets wie folgt beschrieben werden kann: Zu derjenigen Geschwindigkeit, die er in ruhendem Wasser erreichen würde, ist die Geschwindigkeit des Flusses zu addieren, wenn Uwe in Strömungsrichtung schwimmt; dagegen ist die Geschwindigkeit des Flusses zu subtrahieren, wenn Uwe gegen die Strömungsrichtung schwimmt.