Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.

40. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 9
Aufgaben
1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

400941

a) Beweisen Sie: Für jede natürliche Zahl a ist die Zahl a^2 entweder von der Form $4k$ oder von der Form $8k+1$, wobei jeweils k eine natürliche Zahl ist.

b) Gibt es eine n-stellige Quadratzahl mit $n > 1$, die aus lauter gleichen Ziffern besteht?
Beweisen Sie Ihre Antwort!

400942

Ermitteln Sie alle diejenigen Paare (x, y) reeller Zahlen x, y, von denen das System der beiden Ungleichungen

$$x^2 \leq \frac{2000y^2 + 2x - 1}{2001}, \quad y^2 \leq \frac{2000x^2 - 2y - 1}{2001}$$

erfüllt wird!

400943

a) Einem Kreis k sei ein Viereck $ABCD$ einbeschrieben. Die Längen seiner Seiten $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ seien wie üblich in dieser Reihenfolge mit a, b, c, d bezeichnet. Ein zweites dem Kreis k einbeschriebenes Viereck $A'B'C'D'$ habe ebenfalls a, b, c, d als Längen seiner Seiten, und zwar in einer beliebigen Reihenfolge (die sich also auch von der Reihenfolge $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'A'}$ unterscheiden kann).
Beweisen Sie, dass es möglich ist, zwei Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ so zu bilden, dass alle diese Voraussetzungen erfüllt werden und dass die beiden Vierecke nicht zueinander kongruent sind!

b) Beweisen Sie, dass je zwei Vierecke, die die in a) genannten Voraussetzungen erfüllen, zueinander flächengleich sind!