

40. Mathematik-Olympiade

4. Stufe (Bundesrunde)

Klasse 12–13

Aufgaben

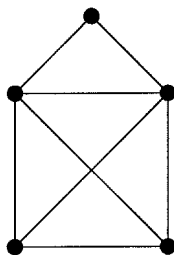
2. Tag



Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

401344

Wie viele Möglichkeiten gibt es, das „Haus vom Nikolaus“ (siehe Abbildung) zu zeichnen? Dabei darf der Stift nicht abgesetzt, keine Kante doppelt gezeichnet und nur an den markierten Ecken des Hauses die Richtung gewechselt werden.



401345

Die Zahlenfolge (x_k) der Fibonacci-Zahlen ist durch $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ und die Bildungsvorschrift

$$x_{k+2} = x_{k+1} + x_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

gegeben.

- Man beweise, dass es eine Fibonacci-Zahl gibt, die im dekadischen Positionssystem auf die Ziffer Neun endet.
- Man untersuche, für welche n es Fibonacci-Zahlen gibt, deren letzte n Ziffern im dekadischen Positionssystem sämtlich Neunen sind.

401346

Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck. Der rechte Winkel liege bei A und der Innenwinkel bei B sei kleiner als der bei C . Die Tangente in A an den Umkreis k des Dreiecks schneide die Gerade BC in D . Der Spiegelpunkt von A an BC sei E . Außerdem sei X der Fußpunkt des Lotes von A auf BE und Y der Mittelpunkt von \overline{AX} . Außer in B schneide die Gerade BY den Umkreis k in Z . Man beweise, dass die Gerade BD eine Tangente an den Umkreis des Dreiecks ADZ ist.