



Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

41. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

410811

Eine Schulklasse plant eine Exkursion. Wenn dafür jeder Teilnehmer 60 € zahlt, dann fehlen für die Gesamtkosten 91 €. Werden jedoch 65 € Teilnehmergebühr erhoben, dann werden 39 € zuviel eingenommen.

Ermittle die Anzahl der Teilnehmer sowie die Höhe des Betrages, den jeder Teilnehmer zu zahlen hat!

Weise durch eine Probe nach, dass dein Resultat richtig ist!

410812

An einer Geburtstagsparty nehmen genau sieben Ehepaare teil. Die Familiennamen der Männer waren: Anders, Bauer, Conrad, Dahlke, Ebert, Frey und Göbel. Die Frauen hießen mit Vornamen Hilde, Inge, Karin, Luise, Maria, Nora und Olga.

Im Verlaufe des Abends tanzte Herr Anders mit Inge und Luise, Herr Frey mit Maria und Luise, Herr Göbel mit Inge und Nora, Herr Conrad mit Inge, Herr Dahlke mit Luise und Herr Ebert mit Nora.

Später wurde zu viert Domino gespielt. Zuerst beteiligten sich Herr Conrad, Herr Anders, Nora und Olga am Spiel. Die beiden männlichen Mitspieler wurden nach einer Weile von den Herren Dahlke und Frey abgelöst. Zum Schluss lösten Hilde und Inge die beiden Frauen vom Spiel ab.

Merkwürdigerweise hat kein Ehemann mit seiner Frau getanzt oder mit ihr gemeinsam am Dominotisch gesessen.

Es ist herauszufinden, wer mit wem verheiratet ist.

410813

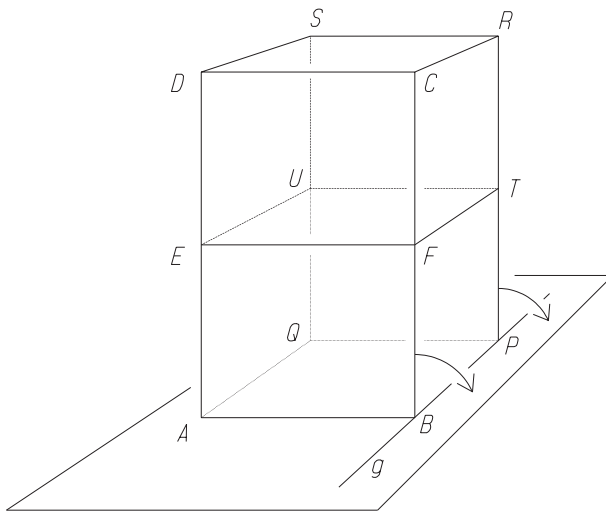
Einem gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreieck ABC mit gegebener Länge a der beiden Katheten \overline{AB} , \overline{AC} sind Rechtecke so einzuzeichnen, dass jeweils ein Eckpunkt eines solchen Rechtecks auf der Hypotenuse und zwei Rechteckseiten auf den Katheten des Dreiecks ABC liegen.

- Beweise, dass alle diese Rechtecke den gleichen Umfang u besitzen, nämlich $u = 2a$.
- Beweise, dass von allen diesen Rechtecken das unter ihnen enthaltene Quadrat den größten Flächeninhalt besitzt!

Hinweis: Im rechtwinkligen Dreieck bezeichnet man diejenige Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, als Hypotenuse; die beiden anderen Seiten nennt man Katheten.

410814

Frank hat ein Glasgefäß von der Form eines Quaders. Dieser Quader hat eine quadratische Grundfläche $ABPQ$ der Seitenlänge 18cm, die Höhe des Quaders beträgt 24cm. Das Gefäß ist genau zur Hälfte mit Wasser gefüllt, der Wasserspiegel ist also ebenfalls ein Quadrat $EFTU$, dabei sind E, F, T, U die Mittelpunkte der Kanten $\overline{AD}, \overline{BC}, \overline{PR}$ und \overline{QS} .



Frank beginnt nun, das Gefäß ein wenig zu kippen, wobei die durch die Punkte B und P gehende Gerade g fest bleibt. Er meint zu beobachten, dass der Wasserspiegel dabei zunächst steigt. Frank vermutet, dass der Wasserspiegel bei weiterem Kippen einmal einen Höchststand erreichen und dann wieder sinken wird. Ehe er das noch ausprobieren kann, ruft seine Mutter entsetzt: "Bald wirst du ja die ganze Stube überschwemmen!" Frank stellt das Gefäß vorsichtig wieder auf die Grundfläche $ABPQ$ und beschließt, seine Überlegungen lieber im Trockenen mit Hilfe einer geometrischen Konstruktion durchzuführen.

Er zeichnet maßstäblich ein Rechteck $ABCD$ mit 6cm bzw. 8cm als Längen der Kanten \overline{AB} bzw. \overline{AD} . Die Verbindungsstrecke \overline{EF} der Mittelpunkte E von \overline{AD} und F von \overline{BC} stellt den Wasserspiegel dar.

- Führe diese Konstruktion aus und konstruiere dann die Lage $A'BC'D'$, die das Rechteck $ABCD$ einnimmt, wenn es um einen Kippwinkel $\sphericalangle ABA'$ der Größe $\alpha = 20^\circ$ gedreht wurde!
Ist der Wasserspiegel nun, wie vermutet, höher gelegen als vor der Drehung? Wie kann man die genaue Lage, die er nach der Drehung hat, konstruieren?
- Wie kann man die Vermutung bestätigen, dass der Wasserspiegel bei weiterem Drehen erst steigt und dann wieder fällt? Wie kann man mit einer Konstruktion die Größe α desjenigen Kippwinkels finden, bei der die größte Höhe des Wasserspiegels erreicht wird?
- Konstruiere diejenige Lage des Rechtecks $A'BC'D'$, die zeigt, bei wie großem Kippwinkel das Wasser auszufließen beginnt!