Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.

41. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 11-13
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

411311
Man bestimme alle Paare positiver ganzer Zahlen $(x; y)$, die das folgende Gleichungssystem lösen:

$$x\,(y+41) = 2001, \tag{1}$$
$$(2\,y+3\,x)\cdot\frac{y}{2} = 2002. \tag{2}$$

411312
Man ermittle alle positiven ganzen Zahlen n, für die

$$n^3 + 4^n - n - 1$$

Primzahl ist.

411313
In ein Quadrat werden, wie in Abbildung A411313 gezeigt, die Buchstaben M (bestehend aus Strecken) und O (ein Kreis) sowie ein weiterer Kreis einbeschrieben, der zwei Strecken des Buchstaben M und den Kreis des O von innen berührt. Es seien A_1 und r_1 Flächeninhalt und Radius des größeren, A_2 und r_2 Flächeninhalt und Radius des kleineren Kreises. Man beweise, dass

$$\frac{A_2}{A_1} + \frac{r_2}{r_1} = 1$$

gilt.

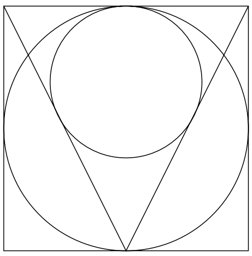

Abbildung A411313

<u>411314</u>

Auf einem Schachbrett mit 8×8 Feldern stehen in der ersten Horizontalen 8 weiße und in der letzten Horizontalen 8 schwarze Steine. Zwei Spieler, Weiß und Schwarz, ziehen abwechselnd mit den weißen bzw. schwarzen Steinen. Ein Zug besteht in der vertikalen Verschiebung eines Steines der eigenen Farbe um eine beliebige Anzahl von Feldern (vor oder zurück); jedoch dürfen Steine nicht übersprungen werden. Verloren hat, wer keinen Zug mehr ausführen kann.

Man beweise, dass Schwarz den Sieg erzwingen kann, wenn Weiß beginnt.